



CentraleSupélec

CentraleSupélec

3^{ème} ANNÉE d'ÉTUDES

Programme Ingénieur CentraleSupélec

3GS2010

LA COMMANDE PREDICTIVE

Didier DUMUR

2020 – 2021

Réservé uniquement aux Enseignants, Elèves et Anciens Elèves de CentraleSupélec.
Reproduction interdite.

SOMMAIRE

1	LES CONCEPTS DE BASE	5
2	COMMANDE PREDICTIVE SOUS CONTRAINTES	7
2.1	DESCRIPTION DU PROBLEME	7
2.1.1	<i>Modèle, critère, contraintes</i>	<i>7</i>
2.1.2	<i>Concepts de faisabilité et de stabilité de la loi prédictive sous contraintes</i>	<i>9</i>
2.1.2.1.	Faisabilité	9
2.1.2.2.	Stabilité.....	9
2.2	STRATEGIES D'OPTIMISATION EN LIGNE.....	9
2.2.1	<i>Méthodes de l'ensemble actif.....</i>	<i>10</i>
2.2.2	<i>Méthode par pivot</i>	<i>11</i>
2.2.3	<i>Méthode du point intérieur.....</i>	<i>12</i>
3	ALGORITHME GPC	15
3.1	MODELE NUMERIQUE DE PREDICTION	15
3.2	STRUCTURE DU PREDICTEUR OPTIMAL	15
3.3	FONCTION DE COUT.....	16
3.4	CONTRAINTES TERMINALES	16
3.5	MINIMISATION DU CRITERE – STRUCTURE DU REGULATEUR POLYNOMIAL	17
3.6	CAS PARTICULIER : REGULATEUR GPC SANS CONTRAINTES TERMINALES.....	19
3.7	CHOIX DES PARAMETRES DE REGLAGE – ÉTUDE DE LA STABILITE	20
3.7.1	<i>Absence de contraintes terminales</i>	<i>20</i>
3.7.1.1.	Réglage des quatre paramètres du critère	20
3.7.1.2.	Prise en compte du polynôme de ‘perturbation’	22
3.7.2	<i>Prise en compte de contraintes terminales.....</i>	<i>25</i>
4	ALGORITHME GPC/MRM	27
4.1	DEFINITIONS	27
4.2	RESOLUTION	28
4.3	EXEMPLE : COMPARAISON GPC – GPC/MRM	29
4.3.1	<i>Application de la structure GPC</i>	<i>30</i>
4.3.2	<i>Application de la structure GPC/MRM.....</i>	<i>32</i>
5	EXTENSION A UNE STRUCTURE GPC CASCADE.....	35
5.1	SYNTHESE DES REGULATEURS	35
5.2	APPLICATION A LA COMMANDE CASCADE VITESSE/POSITION D'UN MOTEUR ASYNCHRONE	36
6	ALGORITHME PFC	39
6.1	DEFINITION DU MODELE NUMERIQUE.....	39
6.2	CHOIX D'UNE TRAJECTOIRE DE REFERENCE	39
6.3	DIFFERENCE OBJET – MODELE.....	39
6.4	STRUCTURATION DE LA COMMANDE FUTURE.....	40
6.5	STRUCTURE DU PREDICTEUR OPTIMAL	41
6.6	DEFINITION DU CRITERE QUADRATIQUE, NOTION DE POINTS DE COÏNCIDENCE	41
6.7	PARAMETRES DE REGLAGE	42
6.8	COMPARAISON GPC / PFC SUR UN SYSTEME FLEXIBLE	42
7	CONCLUSION – PERSPECTIVES.....	47
7.1	CONCLUSION.....	47
7.2	PERSPECTIVES : COMMANDE PREDICTIVE DISTRIBUEE ET HIERARCHISEE	47
7.2.1	<i>Structure distribuée.....</i>	<i>48</i>
7.2.2	<i>Structure hiérarchisée.....</i>	<i>49</i>
8	BIBLIOGRAPHIE.....	53

1 LES CONCEPTS DE BASE

Les techniques de commande prédictive ont prouvé leurs performances au travers de nombreuses applications industrielles. Elles reposent sur des idées relativement anciennes et intuitives, mais n'ont connu un réel essor en tant que technique de commande avancée que depuis le milieu des années 80. Cet essor s'est réalisé principalement selon deux axes privilégiés :

- Commande Prédictive Généralisée (G.P.C.) de D.W. Clarke : 1985
- Commande Prédictive Fonctionnelle (P.F.C.) de J. Richalet : 1987

La philosophie de la Commande Prédictive repose sur la définition de cinq grandes idées, communes à toutes les méthodes :

- Création d'un effet anticipatif exploitant les connaissances explicites sur l'évolution de la trajectoire à suivre dans le futur (connaissances nécessaires requises au moins sur un horizon de quelques points au delà de l'instant présent). En ce sens, la Commande Prédictive repose sur une notion relativement intuitive et présente dans de nombreuses actions effectuées par l'homme (Figure 1).

Cette contrainte permettant de tirer partie de toutes les ressources de la méthode restreint nécessairement le domaine d'application à la commande de systèmes pour lesquels la trajectoire à suivre est parfaitement connue et stockée point par point dans le calculateur. C'est le cas de la commande numérique de machine outils (découpe de pièces), de la commande de bras de robots, de suivis de profils de température d'un bâtiment ...

- Définition d'un modèle numérique du système permettant de réaliser la prédiction du comportement futur du système. Ce modèle discret résulte le plus souvent d'une identification préalable hors ligne. Cette particularité permet de classer la Commande Prédictive dans la grande famille des commandes à base de modèles, dite 'MBC' (Model Based Control).

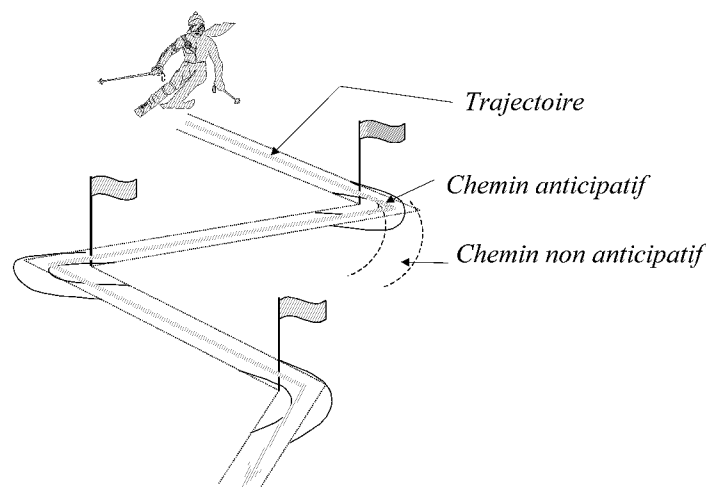


Figure 1 : Notion d'effet anticipatif

- Minimisation d'un critère quadratique à horizon fini portant sur les erreurs de prédiction futures, écarts entre la sortie prédite du système et la consigne future ou une trajectoire de référence réalisant un filtre de la consigne.
- Élaboration d'une séquence de commandes futures en boucle ouverte, optimale au sens du critère précédent, dont seule la première valeur est appliquée sur le système et sur le modèle.
- Réitération des étapes précédentes à la période d'échantillonnage suivante selon le principe de l'horizon fuyant, schématisé Figure 2.

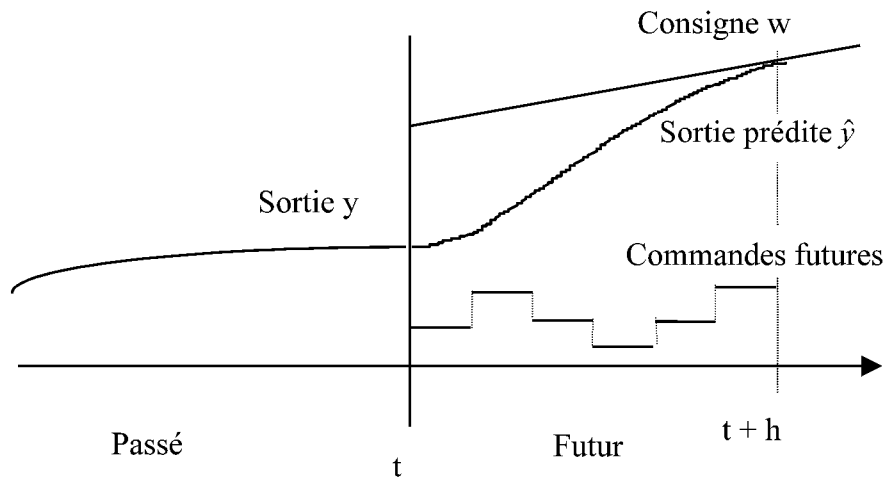


Figure 2 : Principe de l'horizon fuyant

Le régulateur prédictif polynomial que l'on obtient après minimisation du critère a donc pour objectif que la sortie prédite rallie la consigne ou la trajectoire de référence sur un horizon de prédiction donné. Les principes que l'on vient d'évoquer permettent d'établir le schéma de fonctionnement de la Figure 3.

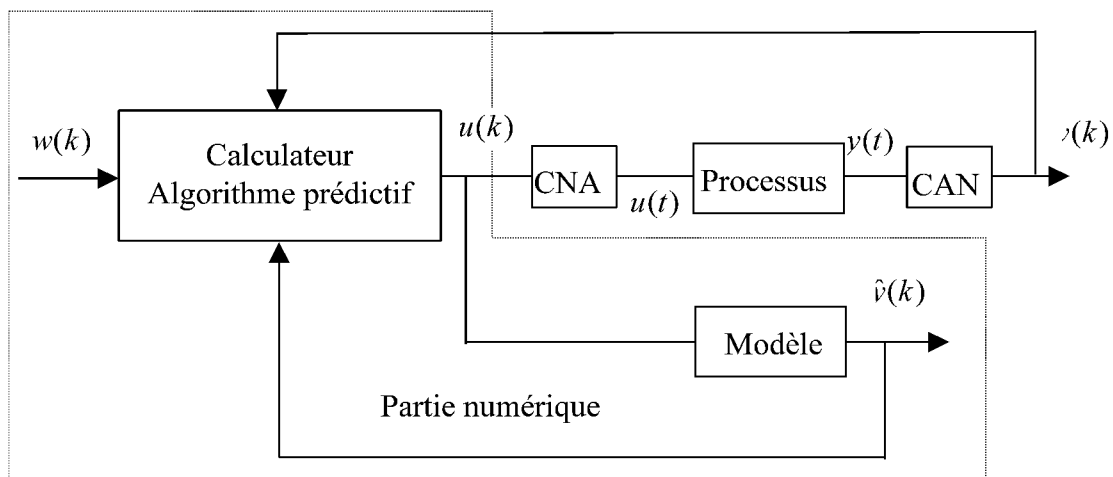


Figure 3 : Principe de fonctionnement d'un algorithme prédictif

Le principe de l'horizon fuyant fait que seule la commande à l'instant présent $u(t)$ est appliquée sur le système. Il est alors possible de restreindre le nombre de valeurs calculées de la séquence.

2 COMMANDE PREDICTIVE SOUS CONTRAINTES

Les points précédents montrent que la commande prédictive permet d'exploiter selon le principe de l'horizon fuyant la simplicité des problèmes de commande optimale en boucle ouverte sur un horizon fini. Par sa description temporelle, elle facilite la prise en compte des limitations des systèmes physiques, autorise la formulation des spécifications en termes de contraintes sur la trajectoire prédite et donne la liberté d'imposer un comportement stable au système asservi par l'ajout de contraintes auxiliaires au sein du problème d'optimisation. Néanmoins la présence de toutes ces contraintes dégrade les performances globales du système bouclé.

Dès lors, la synthèse des lois prédictives nécessite une phase de validation en ligne, au cours de laquelle le choix de paramètres classiques, tels que les horizons et les pondérations intervenant dans la fonction de coût, est intimement lié à la viabilité même de la stratégie de commande. En effet, la présence des contraintes modifie la nature de la loi de commande prédictive, évoluant d'une structure linéaire initiale à une fonction non linéaire de l'état du système, même si le système en lui-même reste linéaire. Une des premières conséquences liée à ce constat est le fait que les outils dédiés aux systèmes linéaires (et certainement les plus complets de l'Automatique) deviennent inadaptés. Le recours à des outils nouveaux permettant de répondre à des problèmes tels que la faisabilité, la stabilité et l'implémentation temps réel des lois de commande prédictive sous contraintes est donc légitime.

2.1 DESCRIPTION DU PROBLEME

2.1.1 *Modèle, critère, contraintes*

La synthèse d'une loi de commande prédictive se base sur l'existence d'un modèle du système à asservir. Si l'on se positionne dans le cadre général de la théorie standard des systèmes linéaires, soit le modèle par représentation d'état¹ :

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in \mathbb{Z}^+ \quad (1)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état à l'instant t , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ le vecteur de commande à l'instant t , A et B les matrices de dimensions correspondantes et la paire (A, B) supposée stabilisable.

Remarque : Une loi de commande prédictive ne peut être performante sans des prédictions les plus précises possibles. Cette précision se trouve également déterminante pour la satisfaction des contraintes, de sorte que le choix du modèle est crucial au sein de cette démarche.

A chaque pas d'échantillonnage, l'état courant (supposé mesurable) $x(t) = x(t|t)$ est utilisé pour élaborer la séquence de commande optimale en boucle ouverte $\mathbf{k}_u^*$:

¹ Cette représentation trouve sa limitation dans le cas des systèmes à retard pour lesquels le modèle de type CARIMA et le formalisme GPC développé au chapitre suivant s'avèrent plus appropriés. L'utilisation de ce modèle aboutit cependant à la même problématique et les résultats présentés ici demeurent valables sous ce formalisme.

$$\mathbf{k}_u^* = \begin{bmatrix} u(t|t)^T & \cdots & u(t+N-1|t)^T \end{bmatrix}^T \quad (2)$$

selon un critère du type :

$$\mathbf{k}_u^* = \arg \min_{\mathbf{k}_u} \left\| P x(t+N|t) \right\|_p + \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left\| Q x(t+k|t) \right\|_p + \left\| R u(t+k|t) \right\|_p \right\} \quad (3)$$

où $\| \cdot \|_p$ représente la norme $p = \{1, 2, \infty\}$ et la paire (Q, A) est supposée détectable. L'horizon de prédiction N , les pondérations $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$ et le coût terminal défini par $P = P^T \geq 0$ constituent les paramètres de réglage de la loi de commande.

L'optimisation de cette fonction de coût doit être réalisée en respectant des contraintes imposées par la dynamique du système, des contraintes fonctionnelles ainsi que des contraintes terminales ou de stabilité :

$$\begin{cases} x(t+k+1|t) = Ax(t+k|t) + Bu(t+k|t) & k \geq 0 \\ Cx(t+k|t) + Du(t+k|t) \leq \gamma, & 0 \leq k \leq N, \quad x(t+k|t) \in X, \quad u(t+k|t) \in U \\ x(t+N|t) \in X_N, \\ X_N = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid L_{in}x \leq l_{in}; L_{eq}x = l_{eq} \right\} & \text{région terminale} \end{cases} \quad (4)$$

Toutes les contraintes considérées ci-dessus sont de nature polyédrale et sont décrites par des systèmes composés d'égalités et d'inégalités linéaires. Les contraintes (4) définissant un ensemble fini, il est possible de séparer les arguments afin d'obtenir une formulation directement exploitable par un programme d'optimisation. En effet, le vecteur des états prédits s'écrit sous forme compacte :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(t+1|t) \\ x(t+2|t) \\ \vdots \\ x(t+N|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \cdots & B \end{bmatrix} \mathbf{k}_u \quad (5)$$

avec $x(t|t) = x(t)$, ce qui permet, par exemple pour $p = 2$, de structurer le problème d'optimisation (3)-(4) par les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_u^* &= \arg \min_{\mathbf{k}_u} 0,5 \mathbf{k}_u^T H \mathbf{k}_u + x^T F \mathbf{k}_u \\ \text{sous les contraintes : } &\begin{cases} A_{in} \mathbf{k}_u \leq B_{in} x + b_{in} \\ A_{eq} \mathbf{k}_u = B_{eq} x + b_{eq} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

L'argument optimal contient la séquence de commande $\mathbf{k}_u^*$. La première partie de cette séquence est effectivement appliquée à l'entrée du système et la procédure complète réitérée au pas d'échantillonnage suivant selon le principe de l'horizon fuyant. L'implantation temps réel fait classiquement appel à des procédures d'optimisation en ligne (programmation quadratique ou linéaire) afin de déterminer l'optimum correspondant à une valeur particulière

de x (les techniques associées à cette approche seront traitées ultérieurement au paragraphe 2.2).

2.1.2 Concepts de faisabilité et de stabilité de la loi prédictive sous contraintes

Les notions mathématiques nécessaires à l'élaboration de conditions nécessaires et suffisantes de faisabilité et de stabilité sont relativement complexes. Les paragraphes ci-dessous ne donnent qu'un aperçu rapide des outils ensemblistes requis.

2.1.2.1. Faisabilité

Une loi de commande prédictive est faisable si le problème d'optimisation associé (6) est faisable. Une loi de commande prédictive est faisable pour un domaine initial X_0 , si $\forall x_0 \in X_0$, l'évolution du système $x(t+1) = Ax(t) + Bu^{MPC}(t, x(t))$ garantit la faisabilité des problèmes d'optimisation associés pour $\forall t \geq 0$.

La caractérisation de la faisabilité d'une loi de commande prédictive sous contraintes s'appuie généralement sur le concept d'invariance positive.

Un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ est dit positif invariant par rapport à $x(t+1) = g(x(t))$ si $\forall x_0 \in D$, la solution $x_t \in D$, $\forall t > 0$.

En se basant sur ce concept, une loi MPC est dite faisable si et seulement si il existe un ensemble positif invariant par rapport à la loi MPC – X_{inv} – satisfaisant $X_{inv} \subset X$ et $X_0 \subset X_{inv}$.

La recherche de cet ensemble est complexe. De façon pratique, l'invariance positive est garantie soit par l'ajout de contraintes terminales, soit par l'utilisation d'un horizon de prédiction pseudo infini assurant que la troncature de la séquence optimale à l'instant t peut être considérée comme solution faisable à l'instant $t+1$.

2.1.2.2. Stabilité

La stabilité de la commande prédictive sous contraintes se base sur l'existence d'un ensemble terminal invariant et l'utilisation d'une fonction de coût qui peut conduire à la construction d'une fonction de Lyapunov. Cet ensemble invariant dans un contexte prédictif se caractérise par l'ensemble objectif pour la trajectoire du système sur l'horizon de prédiction donné. En fait, l'impact de la commande induit deux actions, la première assurant la satisfaction des contraintes et l'évolution vers l'espace invariant, tandis que la deuxième équivaut à un régulateur linéaire qui n'active pas les contraintes lorsque le système se trouve dans l'espace invariant.

Globalement, les notions de faisabilité, ensembles invariants et stabilité de la commande prédictive sous contraintes sont intimement liées. Ainsi, la stabilité de la loi de commande est assurée à condition que la loi de commande amène l'état dans l'ensemble terminal X_N à la fin de l'horizon de prédiction, donc que la loi soit faisable pour tous les points $x_0 \in X_0$.

2.2 STRATEGIES D'OPTIMISATION EN LIGNE

La loi de commande prédictive implique la résolution d'un problème de programmation linéaire ou quadratique selon la norme utilisée, ceci à chaque pas d'échantillonnage. Ce paragraphe examine les algorithmes les plus classiques et les plus efficaces permettant la résolution d'un tel problème en partant de l'hypothèse que la loi sera faisable à chaque pas d'échantillonnage.

Par définition, la commande prédictive se base sur des méthodes en ligne si l'implémentation prend en compte les valeurs courantes de l'état du système et utilise des procédures itératives de programmation linéaire/quadratique, par exemple dans le cas quadratique :

$$\begin{aligned} & \arg \min_{\mathbf{k}_u} 0,5 \mathbf{k}_u^T H \mathbf{k}_u + \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{k}_u \\ \text{s. c. } & \begin{cases} A_{in} \mathbf{k}_u \leq \bar{b}_{in} \\ A_{eq} \mathbf{k}_u = \bar{b}_{eq} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

avec $\bar{\mathbf{f}} = F^T x(t)$; $\bar{b}_{in} = b_{in} + B_{in} x(t)$; $\bar{b}_{eq} = b_{eq} + B_{eq} x(t)$, $x(t)$ l'état du système.

Notons également qu'une condition nécessaire au succès de la stratégie de commande est que les procédures d'optimisation proposent la solution optimale en un temps inférieur à une période d'échantillonnage.

2.2.1 Méthodes de l'ensemble actif

Il s'agit d'une des méthodes les plus connues pour résoudre les problèmes de programmation quadratique, qui doit son nom au fait que la procédure considère à chaque itération une séparation de l'ensemble des contraintes actives et inactives. Il en découle la résolution d'une suite de sous problèmes quadratiques avec contraintes égalité, équivalents par projection à la résolution d'un problème sans contraintes. En effet, la connaissance d'un point initial faisable $\mathbf{k}_u^0$ permet alors d'identifier l'ensemble des inégalités saturées. Le problème d'optimisation quadratique pour lequel ces inégalités sont remplacées par des contraintes égalité en ignorant toutes les autres contraintes :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_u^* &= \arg \min_{\mathbf{k}_u} 0,5 \mathbf{k}_u^T H \mathbf{k}_u + \bar{\mathbf{f}}^T \mathbf{k}_u \\ \text{sous les contraintes : } & A_{sat} \mathbf{k}_u = b_{sat} \end{aligned} \quad (8)$$

peut être résolu en retenant la solution analytique :

$$\mathbf{k}_u^1 = \left(H^{-1} \bar{A}^T (\bar{A} H^{-1} \bar{A}^T)^{-1} \bar{A} H^{-1} - H^{-1} \right) \bar{\mathbf{f}} + H^{-1} \bar{A}^T (\bar{A} H^{-1} \bar{A}^T)^{-1} \bar{\mathbf{b}} \quad (9)$$

avec $\bar{A} \mathbf{k}_u = \bar{\mathbf{b}}$ obtenu à partir de $A_{sat} \mathbf{k}_u = b_{sat}$ pour que le rang de $\bar{A}$ soit maximal.

Un test d'optimalité globale doit être réalisé. Si ces conditions ne sont pas validées, une contrainte parmi celles associées à un coefficient de Lagrange négatif est éliminée de l'ensemble actif et la procédure est réitérée. Il existe plusieurs possibilités quant au choix de la contrainte à éliminer (par exemple éliminer celle ayant le coefficient de Lagrange de plus petite valeur).

Si la solution $\mathbf{k}_u^1$ se trouve à l'extérieur du domaine faisable pour le problème initial, elle sera remplacée par la combinaison linéaire :

$$\mathbf{k}_u^{10} = \mu_1 \mathbf{k}_u^0 + \mu_2 \mathbf{k}_u^1, \quad 0 \leq \mu_1 \leq 1, \quad 0 \leq \mu_2 \leq 1, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1 \quad (10)$$

qui se trouve sur la frontière. Le point $\mathbf{k}_u^{10}$ est faisable mais il lui correspond certaines contraintes saturées qui précédemment étaient inactives. Celles-ci sont ajoutées à l'ensemble actif et la procédure est réitérée.

Remarques :

1. Trouver un point initial faisable est un problème difficile en lui-même. Une idée qui tient compte de la structure de l'optimisation est de choisir comme point initial à l'instant $t+1$ une séquence qui réutilise une partie de la solution optimale au pas précédent. Celle-ci peut malgré tout s'avérer être une combinaison infaisable, il faut dans ce cas recourir à la résolution d'un problème linéaire.
2. Le nombre d'itérations pour trouver la solution optimale exacte est fini si le problème n'est pas susceptible de rencontrer de dégénérescence. L'avantage de la méthode réside dans la simplicité de construction des solutions particulières à chaque itération. Dès lors, pour des ensembles de contraintes de complexité moyenne, cette méthode reste une des approches les plus performantes pour les algorithmes prédictifs. En revanche elle n'est pas recommandée pour des problèmes de grande taille pour lesquels le nombre d'interactions peut être exponentiel à cause du nombre élevé de combinaisons actives à explorer.

2.2.2 Méthode par pivot

Les performances en termes de charge de programmation des stratégies résolvant des problèmes linéaires à l'aide des méthodes par pivot (le succès de la méthode du Simplexe en est une preuve) sont bien connues. Leur application pour des problèmes linéaires ou quadratiques dans un contexte prédictif est envisageable. Toutefois, dans le cas de problèmes quadratiques, une transformation en un problème linéaire complémentaire est nécessaire.

Soit un vecteur $q \in \mathbb{R}^d$ et une matrice $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Un problème linéaire complémentaire (LCP) consiste à trouver les vecteurs w et z tels que :

$$\begin{aligned} w - Mz &= q \\ w_i &\geq 0 ; z_i \geq 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, d \\ w_i z_i &= 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, d \end{aligned} \tag{11}$$

ou conclure qu'une telle solution n'existe pas.

Dans le contexte prédictif, on considère un problème quadratique similaire à (6) :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}_u^* &= \arg \min_{\hat{\mathbf{k}}_u} 0,5 \hat{\mathbf{k}}_u^T \hat{H} \hat{\mathbf{k}}_u + \hat{f}^T \hat{\mathbf{k}}_u \\ \text{sous les contraintes : } &\begin{cases} \hat{A}_{in} \hat{\mathbf{k}}_u \leq \hat{b}_{in} \\ \hat{\mathbf{k}}_u \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

Les conditions d'optimalité sont données par les relations :

$$\begin{aligned} \hat{A}_{in} \hat{\mathbf{k}}_u + y &= \hat{b}_{in} \\ -\hat{H} \hat{\mathbf{k}}_u - \hat{A}_{in}^T \lambda_1 + \lambda_2 &= \hat{f} \\ \hat{\mathbf{k}}_u^T \lambda_2 = 0, \lambda_1^T y &= 0 \\ \hat{\mathbf{k}}_u, y, \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

avec λ_1, λ_2 les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange et y variables de relaxation. En notant :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{A}_{in} \\ \hat{A}_{in}^T & \hat{H} \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} \hat{b}_{in} \\ \hat{f} \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} y \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \hat{\mathbf{k}}_u \end{bmatrix} \quad (14)$$

on se ramène à la forme LCP (11) et des algorithmes par pivot spécialisés existent pour la résolution, parmi lesquels celui dû à Lemke.

A noter que les performances obtenues dans le cadre prédictif dépendent de l'ensemble de contraintes considéré. Il est donc très important d'éliminer l'éventuelle redondance au sein de l'ensemble de contraintes.

2.2.3 Méthode du point intérieur

Ces algorithmes font partie de la classe dite « primal-dual path following methods », qui utilise une fonction barrière et des algorithmes de type Newton pour mettre en œuvre des procédures en temps polynomial. Leurs racines ne sont historiquement pas très éloignées et leur développement a été très important. Si l'on considère comme formulation de départ (similaire à (6)) :

$$\mathbf{k}_u^* = \underset{\mathbf{k}_u}{\text{Arg min}} 0,5 \mathbf{k}_u^T H \mathbf{k}_u + \bar{f}^T \mathbf{k}_u \quad (15)$$

sous les contraintes : $A_{in} \mathbf{k}_u \leq \bar{b}_{in}$

la première étape consiste à construire une fonction barrière (ou de pénalité intérieure) qui devient infinie sur la frontière du domaine faisable. Des choix typiques pour cette fonction peuvent être :

$$g(\mathbf{k}_u) = -\sum_i \log(b_i - a_i^T \mathbf{k}_u) \text{ ou } g(\mathbf{k}_u) = \frac{1}{\sum_i (b_i - a_i^T \mathbf{k}_u)} \quad (16)$$

avec a_i^T la i -ème ligne de A_{in} et b_i la i -ème composante du vecteur $\bar{b}_{in}$. En utilisant cette fonction, on peut remplacer l'optimisation (15) par :

$$\mathbf{k}_u^*(\gamma) = \underset{\mathbf{k}_u}{\text{arg min}} \gamma(0,5 \mathbf{k}_u^T H \mathbf{k}_u + \bar{f}^T \mathbf{k}_u) + g(\mathbf{k}_u) \quad (17)$$

avec γ un scalaire jouant le rôle de pondération. La formulation (17) caractérise un problème d'optimisation non linéaire sans contraintes qui peut être résolu par des méthodes classiques de type Newton. L'intégration de la fonction barrière dans le critère d'optimisation évite le débordement du domaine faisable durant la recherche de la solution optimale, en garantissant donc le fait que les solutions intermédiaires sont faisables. Si la solution optimale est $\mathbf{k}_u^*$ pour le problème initial, en augmentant la pondération γ , la solution de (17) va évoluer de sorte que $\mathbf{k}_u^*(\gamma) \rightarrow \mathbf{k}_u^*$ quand $\gamma \rightarrow \infty$, améliorant donc la qualité de la solution jusqu'à la limite $\|\mathbf{k}_u^*(\gamma) - \mathbf{k}_u^*\| < \varepsilon$ avec ε suffisamment petit. Le chemin suivi par $\mathbf{k}_u^*(\gamma)$ s'appelle la « trajectoire centrale ». Les méthodes les plus efficaces travaillent simultanément sur le problème primal et dual.

Une autre stratégie pour les méthodes du point intérieur part du problème quadratique (6) avec ses conditions d'optimalité :

$$\begin{aligned}
 H \mathbf{k}_u + \bar{f} + A_{eq}^T \nu + A_{in}^T \mu &= 0 \\
 A_{eq} \mathbf{k}_u &= \bar{b}_{eq} \\
 A_{in} \mathbf{k}_u + \xi &= \bar{b}_{in} \\
 \mu \geq 0; \xi \geq 0; \mu^T \xi &= 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

avec ν, μ les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange et ξ le vecteur des variables de relaxation qui permet la transformation des inégalités en égalités. Ces équations sont ensuite transcrites sous forme matricielle semblable à la forme prise en compte dans les techniques LCP :

$$F(\mathbf{k}_u, \nu, \mu, \xi) = \begin{bmatrix} H \mathbf{k}_u + A_{eq}^T \nu + A_{in}^T \mu + \bar{f} \\ -A_{eq} \mathbf{k}_u + \bar{b}_{eq} \\ -A_{in} \mathbf{k}_u - \xi + \bar{b}_{in} \\ \Xi M e = 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{19}$$

$$\mu \geq 0; \xi \geq 0$$

avec $\Xi = \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_r\}$; $M = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$; $e = [1 \ \dots \ 1]^T$.

La méthode débouche donc sur la résolution d'un système d'équations non linéaires pour laquelle des méthodes de type Newton peuvent être employées en utilisant à chaque itération une approximation linéaire de F . Une méthode connue est celle du point intérieur infaisable, pour laquelle les solutions itératives peuvent être infaisables par rapport à l'ensemble de contraintes initiales mais intérieures au quadrant positif $\mu \geq 0; \xi \geq 0$. Une mesure de l'infaisabilité (et de l'optimalité) des solutions intermédiaires est représentée par l'écart de dualité :

$$\gamma = \mu^T \xi / r \tag{20}$$

avec r le nombre d'inégalités dans l'ensemble de contraintes.

Les méthodes du point intérieur sont de plus en plus utilisées, au détriment des méthodes de l'ensemble actif, car leur facteur de convergence est polynomial. En contrepartie, la charge de calcul par itération est plus importante. Les performances sont fortement liées aux précautions prises pour éviter les problèmes de mauvais conditionnement numérique.

3 ALGORITHME GPC

Le chapitre précédent a montré que la solution d'un problème de commande prédictive sous contraintes impliquait la résolution de problèmes d'optimisation en ligne. Or, si l'on ne considère pas de contraintes inégalité a priori, le problème pour des systèmes linéaires peut avoir une solution analytique définie hors ligne. Ce paragraphe a pour but de préciser, dans ce cas, les points fondamentaux de la structure prédictive, depuis la traduction mathématique des concepts généraux précédents jusqu'à l'obtention du régulateur polynomial équivalent.

3.1 MODELE NUMERIQUE DE PREDICTION

Toute forme est admissible pour le modèle, mais l'approche polynomiale entrée / sortie par fonctions de transfert est privilégiée.

Classiquement le modèle est représenté sous forme CARIMA (Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average) :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \frac{C(q^{-1}) \xi(t)}{\Delta(q^{-1})} \quad (21)$$

où $\Delta(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$, $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du modèle, $C(q^{-1})$ est un polynôme dit de perturbation, $\xi(t)$ est un bruit blanc centré, q^{-1} l'opérateur retard et $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ des polynômes définis par :

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \end{cases}$$

Ce modèle, encore appelé modèle incrémental, introduit une action intégrale et permet d'annuler toute erreur statique vis à vis d'une entrée ou d'une perturbation en échelon.

3.2 STRUCTURE DU PREDICTEUR OPTIMAL

La sortie prédite $y(t+j/t)$ est décomposée de façon classique en réponse libre et réponse forcée, incluant une forme polynomiale pour mener à bien la synthèse polynomiale finale :

$$y(t+j/t) = \underbrace{\frac{F_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{H_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} \Delta u(t-1)}_{\text{réponse libre}} + \underbrace{G_j(q^{-1}) \Delta u(t+j-1) + J_j(q^{-1}) \xi(t+j)}_{\text{réponse forcée}} \quad (22)$$

Les polynômes inconnus F_j, G_j, H_j, J_j sont solutions uniques d'équations de Diophante, obtenues par égalité entrée / sortie des fonctions de transfert des équations (21) et (22), et se résolvant de façon récursive :

$$\begin{aligned} \Delta(q^{-1})A(q^{-1})J_j(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) &= C(q^{-1}) \\ C(q^{-1})G_j(q^{-1}) + q^{-j}H_j(q^{-1}) &= B(q^{-1})J_j(q^{-1}) \end{aligned}$$

$$\text{avec :} \quad \begin{aligned} \text{degré}[J_j(q^{-1})] &= j-1 & \text{degré}[F_j(q^{-1})] &= \max(\text{degré}[A(q^{-1})], \text{degré}[C(q^{-1})] - j) \\ \text{degré}[G_j(q^{-1})] &= j-1 & \text{degré}[H_j(q^{-1})] &= \max(\text{degré}[B(q^{-1})] - 1, \text{degré}[C(q^{-1})] - 1) \end{aligned}$$

L'ensemble des calculs peut être effectué hors boucle temps réel.

Le prédicteur optimal est enfin défini en considérant que la meilleure prédiction du bruit dans le futur est sa moyenne (supposée nulle ici), soit :

$$\hat{y}(t+j/t) = \frac{F_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{H_j(q^{-1})}{C(q^{-1})} \Delta u(t-1) + G_j(q^{-1}) \Delta u(t+j-1) \quad (23)$$

3.3 FONCTION DE COUT

La loi de commande G.P.C. est obtenue par minimisation d'un critère quadratique portant sur les erreurs futures avec un terme de pondération sur la commande :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(t+j) - w(t+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} \Delta u^2(t+j-1) \quad (24)$$

$$\text{avec :} \quad \Delta u(t+j) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad j \geq N_u$$

Le critère outre le polynôme $C(q^{-1})$ nécessite la définition de quatre paramètres de réglage :

- N_1 : horizon de prédiction minimal ;
- N_2 : horizon de prédiction maximal ;
- N_u : horizon de prédiction sur la commande ;
- λ : coefficient de pondération sur la commande.

3.4 CONTRAINTES TERMINALES

De nombreux problèmes physiques nécessitent la prise en compte de contraintes, tant sur le signal de sortie que sur la commande. Ces contraintes peuvent être de type 'égalité', lorsque l'on cherche à imposer des valeurs précises au signal considéré, ou de type 'inégalité', permettant de définir des saturations ou des plages de variations spécifiques pour un signal. L'objet de ce paragraphe est d'examiner la prise en compte de contraintes 'égalité' au sein d'un algorithme G.P.C. Dans ce cas en effet, la structure finale du régulateur reste linéaire, alors que les contraintes de type 'inégalité' conduisent à un régulateur équivalent non linéaire, issu d'une minimisation par des techniques de programmation non linéaire.

Imposer des contraintes de type 'égalité' nécessite dès lors la minimisation du critère de coût G.P.C. (4) sujet à un jeu de m contraintes égalité dans le futur, appelées contraintes terminales, définies par :

$$\hat{y}(t+N_2+j) = w(t+N_2) \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, m \quad (25)$$

où m représente le nombre de points pour lesquels la sortie prédite $\hat{y}$ doit coïncider avec la consigne w après l'horizon de prédiction supérieur N_2 . Cette stratégie a été développée initialement dans une version baptisée C.R.H.P.C. (Constrained Receding Horizon Predictive

Control). La minimisation ci-dessous propose en fait une structure unifiée des versions avec ou sans contraintes, l'absence de contraintes se traduisant simplement par $m = 0$.

3.5 MINIMISATION DU CRITERE – STRUCTURE DU REGULATEUR POLYNOMIAL

La minimisation du critère nécessite la mise sous forme matricielle de l'équation de prédiction (23) et de la fonction de coût (24), et de l'équation relative aux contraintes (25), soit respectivement :

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G} \mathbf{k}_u + \underbrace{\frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(t) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(t-1)}_{\text{réponse libre}} \quad (26)$$

et :

$$J(\mathbf{k}_u) = \left[\mathbf{G} \mathbf{k}_u + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(t) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(t-1) - \mathbf{w} \right]^T \quad (27)$$

$$\left[\mathbf{G} \mathbf{k}_u + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if} y(t) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih} \Delta u(t-1) - \mathbf{w} \right] + \lambda \mathbf{k}_u^T \mathbf{k}_u$$

sous : $\mathbf{G}_c \mathbf{k}_u = \mathbf{w}_c - \mathbf{f}_c \quad (28)$

avec : $\mathbf{if} = [F_{N_1}(q^{-1}) \quad \cdots \quad F_{N_2}(q^{-1})]^T$

$$\mathbf{ih} = [H_{N_1}(q^{-1}) \quad \cdots \quad H_{N_2}(q^{-1})]^T$$

$$\mathbf{k}_u = [\Delta u(t) \quad \cdots \quad \Delta u(t + N_u - 1)]^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathcal{g}_{N_1}^{N_1} & \mathcal{g}_{N_1-1}^{N_1} & \cdots & \cdots \\ \mathcal{g}_{N_1+1}^{N_1+1} & \mathcal{g}_{N_1}^{N_1+1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{g}_{N_2}^{N_2} & \mathcal{g}_{N_2-1}^{N_2} & \cdots & \mathcal{g}_{N_2-N_u+1}^{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{g}_{N_1} & \mathcal{g}_{N_1-1} & \cdots & \cdots \\ \mathcal{g}_{N_1+1} & \mathcal{g}_{N_1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{g}_{N_2} & \mathcal{g}_{N_2-1} & \cdots & \mathcal{g}_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_c = [w(t + N_2) \quad \cdots \quad w(t + N_2)]^T$$

$$\mathbf{f}_c = [f_c(t + N_2 + 1), \dots, f_c(t + N_2 + m)]^T$$

$$\mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} \mathcal{g}_{N_2+1} & \mathcal{g}_{N_2} & \cdots & \mathcal{g}_{N_2-N_u+2} \\ \mathcal{g}_{N_2+2} & \mathcal{g}_{N_2+1} & \cdots & \mathcal{g}_{N_2-N_u+3} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \mathcal{g}_{N_2+m} & \mathcal{g}_{N_2+m-1} & \cdots & \mathcal{g}_{N_2-N_u+m+1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f}_c$ représente la réponse libre du système sous contrainte, définie de façon similaire à la réponse libre du système non contraint (voir (26)), par :

$$\mathbf{f}_c = \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if}_c y(t) + \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih}_c \Delta u(t-1) \quad (29)$$

avec :

$$\mathbf{if}_c = \begin{bmatrix} F_{N_2+1}(q^{-1}) & \dots & F_{N_2+m}(q^{-1}) \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{ih}_c = \begin{bmatrix} H_{N_2+1}(q^{-1}) & \dots & H_{N_2+m}(q^{-1}) \end{bmatrix}^T$$

Notons que les coefficients des polynômes $\{G_j\}$ intervenant dans les matrices $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}_c$ sont en fait les coefficients de la réponse indicielle discrète du modèle (1).

La solution optimale du problème (27) sous les contraintes (28) est obtenue à l'aide de la technique des multiplicateurs de Lagrange. Considérons la fonction de Lagrange L :

$$L(\mathbf{k}_u, \boldsymbol{\mu}) = J(\mathbf{k}_u) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{e}(\mathbf{k}_u) \quad (30)$$

où $J(\mathbf{k}_u)$ représente la fonction objectif, $\boldsymbol{\mu}$ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange de dimension m , et $\mathbf{e}(\mathbf{k}_u)$ le vecteur décrivant les m contraintes terminales.

La solution optimale de ce problème sous contraintes doit alors satisfaire les deux conditions :

$$\frac{\partial L(\mathbf{k}_u, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mathbf{k}_u} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L(\mathbf{k}_u, \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = 0 \quad (31)$$

soit :

$$\mathbf{k}_u^* = 2 \left[\mathbf{H}^{-1} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T (\mathbf{G}_c \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T)^{-1} \mathbf{G}_c \mathbf{H}^{-1} \right] \mathbf{G}^T \mathbf{c} + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T (\mathbf{G}_c \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T)^{-1} \mathbf{b} \quad (32)$$

avec :

$$\mathbf{H} = 2 \left(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}_{N_u} \right)$$

$$\mathbf{c} = \left(\mathbf{w} - \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if}_c y(t) - \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih}_c \Delta u(t-1) \right) \quad (33)$$

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{w}_c - \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{if}_c y(t) - \frac{1}{C(q^{-1})} \mathbf{ih}_c \Delta u(t-1) \right)$$

De façon classique en commande prédictive, seule la première valeur de la séquence (32) est appliquée au système, selon le principe de l'horizon fuyant :

$$\Delta u_{opt}(t) = \mathbf{m}_1^T \mathbf{b} + \mathbf{n}_1^T \mathbf{c} \quad (34)$$

avec :

$$\mathbf{m}_1^T \text{ première ligne de } \left(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T (\mathbf{G}_c \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T)^{-1} \right)$$

$$\mathbf{n}_1^T \text{ première ligne de } \left[2 \left(\mathbf{H}^{-1} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T (\mathbf{G}_c \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_c^T)^{-1} \mathbf{G}_c \mathbf{H}^{-1} \right) \mathbf{G}^T \right] \quad (35)$$

L'équation (34) correspond alors à un correcteur linéaire, pouvant se structurer sous une forme RST tout à fait similaire à celles envisagées lors de problèmes généraux de commande numérique, comme indiqué Figure 4, selon la relation :

$$S(q^{-1})\Delta u(t) = -R(q^{-1})y(t) + T(q)w(t) \quad (36)$$

Les trois polynômes R , S , T prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} S(q^{-1}) &= C(q^{-1}) + q^{-1}(\mathbf{n}_1^T \mathbf{i}h + \mathbf{m}_1^T \mathbf{i}h_c) \\ R(q^{-1}) &= \mathbf{n}_1^T \mathbf{i}f + \mathbf{m}_1^T \mathbf{i}f_c \\ T(q) &= C(q^{-1}) \left(\mathbf{n}_1^T [q^{N_1} \dots q^{N_2}]^T + \mathbf{m}_1^T [q^{N_2} \dots q^{N_2}]^T \right) \end{aligned} \quad (37)$$

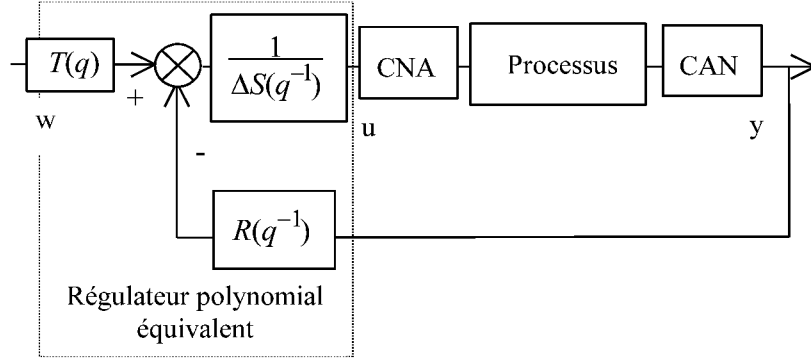


Figure 4 : Structure du régulateur polynomial équivalent

On remarque que le polynôme $T(q)$ renferme la structure non causale (puissances positives de q) inhérente à la commande prédictive.

L'intérêt qui se dégage de la représentation RST très générale est que finalement la boucle temps réel s'avère très peu gourmande en temps de calcul, puisque la commande appliquée au système se calcule par une simple équation aux différences (36). Les trois polynômes R, S, T sont en effet élaborés hors ligne et définis de façon unique dès lors que les quatre paramètres de réglage sont choisis.

En conséquence, ce type de commande permet la sélection de périodes d'échantillonnage faibles et s'avère bien adapté à la commande de systèmes électromécaniques rapides (machine outil, usinage très grande vitesse, ...).

Un autre intérêt majeur de cette structure RST concerne l'étude de la stabilité de la boucle corrigée, et donc la caractérisation de la stabilité de la commande prédictive élaborée, qui est dès lors possible pour un jeu de paramètres du critère fixé. Cette étude est envisagée au paragraphe 3.7.

3.6 CAS PARTICULIER : REGULATEUR GPC SANS CONTRAINTES TERMINALES

La solution tout à fait générale obtenue ci-dessus en présence de contraintes terminales se simplifie lorsque le système n'est pas soumis à ce type de contrainte. Dans ce cas, la structure du régulateur RST devient :

$$\begin{aligned} S(q^{-1}) &= C(q^{-1}) + \mathbf{n}_1^T \mathbf{i}h q^{-1} \\ R(q^{-1}) &= \mathbf{n}_1^T \mathbf{i}f \\ T(q) &= C(q^{-1}) \mathbf{n}_1^T [q^{N_1} \dots q^{N_2}]^T \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \text{degré}[S(q^{-1})] &= \max(\text{degré}[B(q^{-1})], \text{degré}[C(q^{-1})]) \\ \text{avec : } \text{degré}[R(q^{-1})] &= \max(\text{degré}[A(q^{-1})], \text{degré}[C(q^{-1})] - N_1) \\ \text{degré}[T(q)] &= N_2 + \text{degré}[C(q^{-1})] \end{aligned}$$

$$\text{et : } \mathbf{N} = [\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I}_{N_u}]^{-1} \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{N_u}^T \end{bmatrix}$$

Les vecteurs et matrices $\mathbf{ih}$, $\mathbf{if}$ et $\mathbf{G}$ conservent la signification définie lors de la résolution générale.

3.7 CHOIX DES PARAMETRES DE REGLAGE – ÉTUDE DE LA STABILITE

3.7.1 Absence de contraintes terminales

3.7.1.1 Réglage des quatre paramètres du critère

La définition du critère quadratique (4) a montré que l'utilisateur doit fixer quatre paramètres de réglage. Ce choix des paramètres s'avère cependant délicat pour une personne non spécialiste, car il n'existe pas de relations empiriques permettant de relier ces paramètres à des 'indicateurs' classiques en Automatique, tels que marges de stabilité ou bande passante.

À partir de l'étude d'un grand nombre de systèmes types, il est cependant possible de dégager les quelques 'règles' suivantes :

- N_1 : horizon de prédiction inférieur sur la sortie. Le produit $N_1 T_e$ (T_e période d'échantillonnage) est choisi égal au retard pur du système.
- N_2 : horizon de prédiction supérieur sur la sortie. Le produit $N_2 T_e$ est limité par la valeur du temps de réponse. Plus N_2 est grand, plus le système corrigé est stable et lent.
- N_u : horizon de prédiction sur la commande. Choisir N_u égal à 1 simplifie les calculs et ne pénalise pas les marges de stabilité (a contrario, une valeur supérieure a tendance à dégrader la marge de phase).
- λ : coefficient de pondération sur la commande. Ce paramètre est lié au gain du système, par la relation empirique :

$$\lambda_{opt} = \text{tr}(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \quad (39)$$

où $\mathbf{G}$ est la matrice des coefficients de la réponse indicielle du modèle décrite en 3.5.

Le choix des paramètres se limite donc très souvent à une recherche bidimensionnelle (N_2 et λ) aboutissant à une sélection caractéristique d'un 'bon' réglage.

Cette notion de réglage satisfaisant doit tenir compte, pour être significative, d'un grand nombre de critères formalisés à partir des outils classiques de l'Automatique fréquentielle. On pourra ainsi être amené à examiner les objectifs de stabilité et de robustesse suivants.

i. Objectifs de stabilité

Ces objectifs sont liés à l'étude dans les plans de Bode, Black ou Nyquist de la fonction de transfert de la boucle ouverte corrigée :

$$H_{bo}(q^{-1}) = \frac{q^{-1} B(q^{-1}) R(q^{-1})}{A(q^{-1}) S(q^{-1}) \Delta(q^{-1})} \quad (40)$$

On admet généralement qu'un 'bon' réglage est caractérisé par :

- Une marge de phase supérieure à 45°,
- Une marge de gain supérieure à 6 à 8 dB.

ii. Objectifs de robustesse

Ces objectifs sont liés au calcul de la marge de retard :

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\varphi}{\omega_c} \quad (\Delta\varphi \text{ en radian}) \quad (41)$$

à l'étude dans les plans fréquentiels de la fonction de sensibilité directe :

$$\sigma_d = \frac{A(q^{-1}) S(q^{-1}) \Delta(q^{-1})}{A(q^{-1}) S(q^{-1}) \Delta(q^{-1}) + q^{-1} B(q^{-1}) R(q^{-1})} \quad (42)$$

et de la fonction de sensibilité complémentaire :

$$\sigma_c = \frac{q^{-1} B(q^{-1}) R(q^{-1})}{A(q^{-1}) S(q^{-1}) \Delta(q^{-1}) + q^{-1} B(q^{-1}) R(q^{-1})} \quad (43)$$

avec, d'après le schéma ci-dessous :

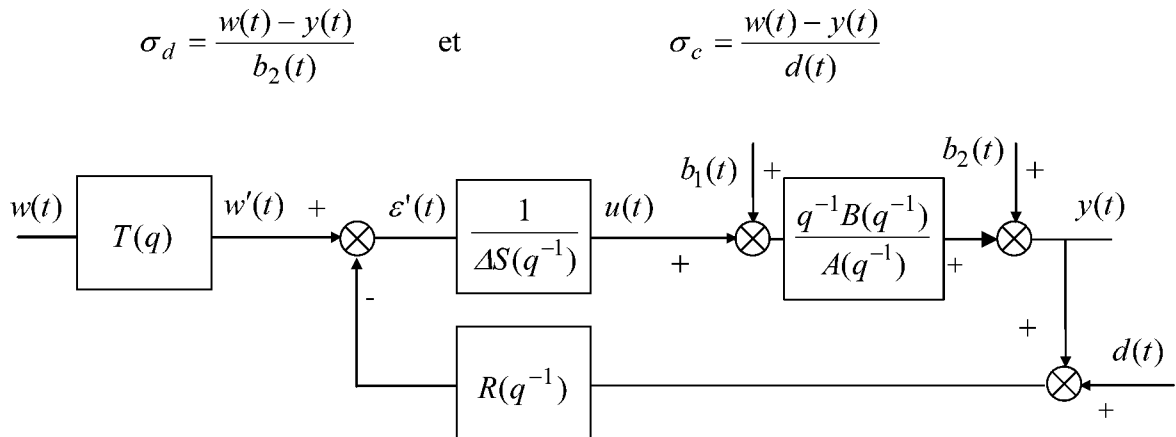


Figure 5 : Structure générale d'un système asservi

Ainsi, la fonction de sensibilité directe traduit l'influence d'une perturbation de sortie sur la sortie du système, la fonction de sensibilité complémentaire l'influence d'un bruit de mesure sur la sortie. On admet généralement qu'un 'bon' réglage est caractérisé par :

- Une marge de retard supérieure à une période d'échantillonnage,
- Une fonction de sensibilité directe de module inférieur à 6 dB,
- Une fonction de sensibilité complémentaire de module inférieur à 3 dB.

3.7.1.2. Prise en compte du polynôme de 'perturbation'

Une technique classique de robustification de la commande GPC est l'utilisation du polynôme dit de perturbation $C(q^{-1})$ du modèle CARIMA comme paramètre de réglage. Cet aspect est en fait primordial uniquement en **régulation**, puisque le polynôme de perturbation n'intervient pas lors du calcul de la fonction de transfert entrée/sortie en boucle fermée, il ne peut donc modifier la dynamique de suivi de trajectoire. Considérons en effet le calcul de la boucle fermée suivant, en ne faisant intervenir que la seule perturbation liée au bruit de mesure $d(t)$:

$$\left(A(q^{-1})S(q^{-1})\Delta(q^{-1}) + q^{-1} B(q^{-1})R(q^{-1}) \right) y(t) = q^{-1} B(q^{-1})T(q)w(t) - q^{-1} B(q^{-1})R(q^{-1})d(t) \quad (44)$$

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée peut se réécrire, en remplaçant les polynômes $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ par les expressions déduites en (38) :

$$\begin{aligned} A(q^{-1})S(q^{-1})\Delta(q^{-1}) + q^{-1} B(q^{-1})R(q^{-1}) &= A(q^{-1})C(q^{-1})\Delta(q^{-1}) + \\ &+ C(q^{-1}) \left[\sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i \left(\frac{A(q^{-1})\Delta(q^{-1})H_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} + \frac{B(q^{-1})F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})} \right) q^{-1} \right] \end{aligned}$$

avec : $\mathbf{n}_1^T = [\alpha_{N_1} \quad \alpha_{N_1+1} \quad \cdots \quad \alpha_{N_2}]$

Soit en introduisant les deux équations de Diophante intervenant lors du calcul du prédicteur :

$$A(q^{-1})S(q^{-1})\Delta(q^{-1}) + q^{-1} B(q^{-1})R(q^{-1}) = C(q^{-1})A_c(q^{-1}) \quad (45)$$

où $A_c(q^{-1})$ est un polynôme (et non une fraction) ne dépendant que des quatre paramètres de réglage du critère mentionnés au paragraphe précédent. Comme le polynôme $T(q)$ est aussi multiple de $C(q^{-1})$ selon la relation :

$$T(q) = C(q^{-1})T_1(q) \quad (46)$$

on déduit la nouvelle forme de la relation (44) :

$$y(t) = \frac{q^{-1} B(q^{-1})T_1(q)}{A_c(q^{-1})} w(t) - \frac{q^{-1} B(q^{-1})R(q^{-1})}{C(q^{-1})A_c(q^{-1})} d(t) \quad (47)$$

On constate dès lors que le transfert en boucle fermée entre l'entrée et la sortie n'est pas modifié par le polynôme $C(q^{-1})$ (ceci n'est vrai en fait que si le modèle est parfait), en revanche, $C(q^{-1})$ influence le transfert entre la perturbation et la sortie. Ce polynôme modélisant l'influence du bruit dans le système peut être vu également comme la dynamique de l'observateur de la loi de commande.

L'influence du bruit au sein du système étant généralement impossible à identifier, le polynôme $C(q^{-1})$ peut être utilisé comme paramètre de réglage de cette dynamique d'observation. De façon générale, ce polynôme a donc une influence sur la robustesse et le rejet de perturbation, mais son choix s'avère difficile.

Un cas illustratif particulièrement intéressant consiste à choisir le polynôme $C(q^{-1})$ de façon à améliorer le rejet des bruits de mesure à hautes fréquences, en induisant un comportement suffisamment 'passe-bas' du transfert y/d . Sans modifier le comportement entrée/sortie par rapport à une synthèse effectuée avec $C(q^{-1}) = 1$, il devient possible d'accroître la robustesse de ce GPC initial vis-à-vis d'incertitudes hautes fréquences. Considérons pour cela la commande en vitesse d'un moteur asynchrone, pour laquelle on souhaite atténuer l'influence des bruits de mesure. Pour une période d'échantillonnage de 5 ms, une fonction de transfert a été identifiée expérimentalement entre la commande en couple et la vitesse moteur sous la forme [BOU 96] :

$$H(q^{-1}) = \frac{q^{-1}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{1,344q^{-1} + 3,024q^{-2}}{1 - 0,98q^{-1} - 0,02q^{-2}}$$

Pour illustrer le rôle du polynôme de perturbation, deux correcteurs GPC ont été synthétisés, vérifiant dans tous les cas les critères de stabilité et de robustesse décrits précédemment :

1. Correcteur avec $C(q^{-1}) = 1$ et $N_1 = 1, N_2 = 8, N_u = 1, \lambda = 200$
2. Correcteur avec $C(q^{-1}) = (1 - 0,8q^{-1})(1 - 0,9q^{-1})$ et $N_1 = 1, N_2 = 8, N_u = 1, \lambda = 200$

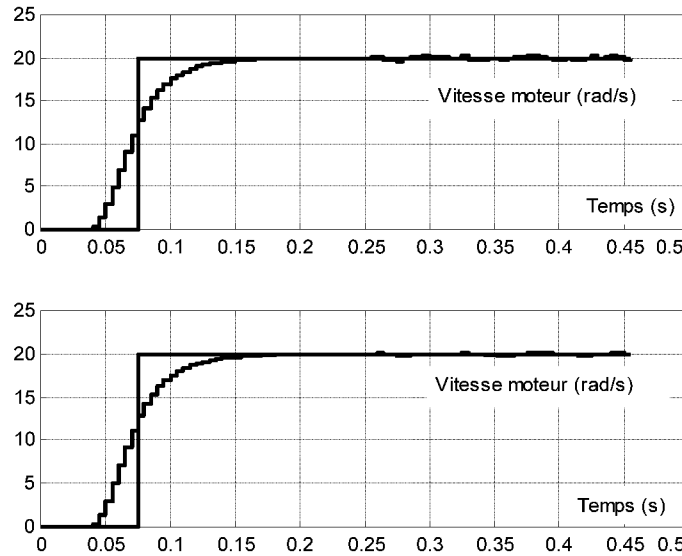


Figure 6 : Vitesse moteur (en haut : GPC avec $C(q^{-1}) = 1$, en bas : GPC robustifié)

La vitesse moteur et le signal de commande obtenus en réponse à un échelon de consigne avec le régulateur 1 sont reportés dans les parties supérieures des Figures 6 et 7. Pour cette simulation, un bruit blanc centré de variance $0,25^2$ a été ajouté en sortie du système. L'influence de ce bruit de mesure apparaît clairement non seulement sur la sortie mais aussi et surtout sur la commande.

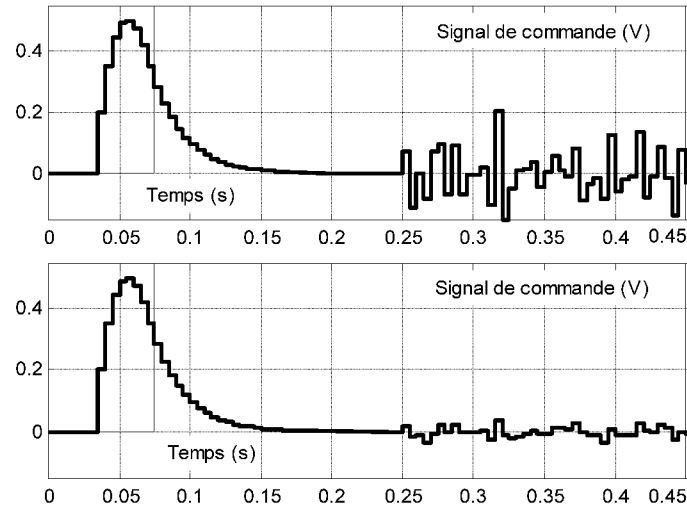


Figure 7 : Commande en couple (en haut : GPC avec $C(q^{-1}) = 1$, en bas : GPC robustifié)

Afin d'améliorer le comportement du moteur vis à vis de ce bruit de mesure, le régulateur 2 est alors implanté, correspondant à un choix du polynôme $C(q^{-1})$ conférant au transfert y/d un comportement suffisamment passe-bas.

Les parties inférieures des Figures 6 et 7 illustrent les signaux obtenus pour cette configuration. Une comparaison avec les réponses précédentes traduit une diminution significative de l'influence du bruit de mesure, à la fois sur la vitesse et sur le signal de commande. On s'aperçoit également, conformément à la théorie, que le comportement entré/sortie n'est pas modifié.

Les Figures 8 et 9 reproduisent les réponses fréquentielles des transferts y/d et u/d respectivement, et illustrent clairement le caractère passe-bas induit par le choix du polynôme $C(q^{-1})$.

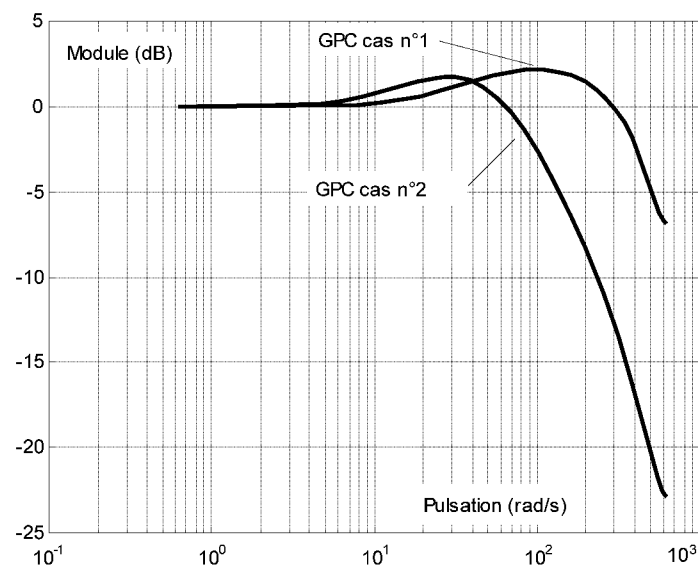
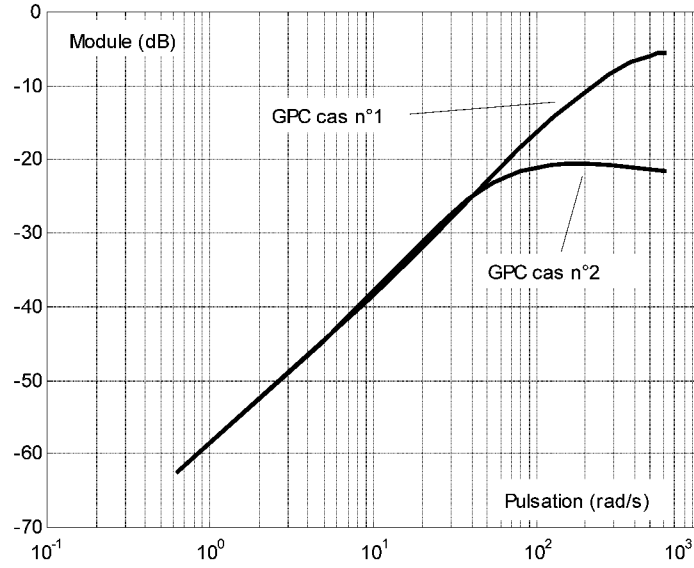


Figure 8 : Réponse fréquentielle du transfert y/d


 Figure 9 : Réponse fréquentielle du transfert u/d

La principale difficulté réside dans le choix de ce polynôme, pour lequel aucune règle simple n'existe. Des méthodes se développent pour en faciliter l'implantation, essentiellement basées sur la paramétrisation de Youla comme technique de robustification.

3.7.2 Prise en compte de contraintes terminales

En présence de contraintes terminales, un cinquième paramètre – le nombre de contraintes – vient s'ajouter. Il a été montré que le choix suivant des paramètres de réglage garantit la stabilité du système bouclé :

$$\begin{aligned}
 N_1 &\approx \text{retard pur du système} \\
 N_2 &\geq \text{degré} [A(q^{-1})] + 2 \\
 N_u &= N_2 + 1 \\
 m &= \text{degré} [A(q^{-1})] + 1 \\
 \lambda &> 0
 \end{aligned} \tag{48}$$

Si ce choix de paramètres n'est pas suivi (parce qu'il conduit par exemple à des structures matricielles de dimensions très importantes), les règles précédentes du cas sans contraintes s'appliquent avec les mêmes constatations, et une règle supplémentaire néanmoins, permettant de se donner au moins autant de degrés de liberté que l'on s'impose de contraintes :

$$N_u \geq m \tag{49}$$

4 ALGORITHME GPC/MRM

Le but de cette structure prédictive à modèles de référence multiples est double.

Tout d'abord, elle donne la possibilité d'imposer une *trajectoire de référence* par l'intermédiaire d'un modèle de poursuite stable fixé par l'utilisateur, permettant d'adoucir le ralliement de la consigne. Ce modèle de poursuite impose la dynamique du système bouclé (comportement entrée / sortie) et peut être considéré comme un placement de pôles.

Il s'agit ensuite d'atténuer les variations brusques de commande que l'on peut parfois constater avec l'algorithme précédent, en essayant de reconstituer la *commande de référence* raisonnable qu'il faut appliquer au système pour obtenir en sortie la trajectoire de référence, et en faisant apparaître dans le critère une minimisation sur l'erreur de commande et non plus seulement sur la commande.

4.1 DEFINITIONS

Le modèle numérique de prédiction est là encore défini sous forme CARIMA :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \frac{\xi(t)}{\Delta(q^{-1})} \quad (50)$$

On suppose ici pour simplifier la résolution que le polynôme de perturbation est choisi égal à 1 (problématique de suivi de trajectoire). Le modèle de poursuite choisi par l'utilisateur permet de spécifier la trajectoire de référence $y_r(t)$ que la sortie du système devra suivre :

$$A_r(q^{-1})y_r(t) = q^{-1}B_r(q^{-1})w(t) \quad (51)$$

où : $B_r(q^{-1}) = B(q^{-1})P(q^{-1})$

- $P(q^{-1})$ est conçu de façon à garantir le comportement asymptotique : $y_r(\infty) = w(\infty)$. Ainsi pour une consigne en échelon, on choisit :

$$P(q^{-1}) = \frac{A_r(1)}{B(1)} = \text{Cte}$$

- $A_r(q^{-1})$ est généralement un polynôme du second degré permettant d'imposer un temps de réponse désiré ainsi qu'un coefficient d'amortissement adapté.

Couplée à la trajectoire de référence $y_r(t)$, une commande de référence $u_r(t)$, admissible par le système, est également définie, les deux trajectoires étant liées par la relation :

$$A(q^{-1})y_r(t) = q^{-1}B(q^{-1})u_r(t) \quad (52)$$

Afin d'éviter l'inversion du modèle et les problèmes de stabilité liés au polynôme $B(q^{-1})$ qui pourraient en résulter, l'équation (52) peut être reformulée à partir de la relation (51) par :

$$A_r(q^{-1})u_r(t) = A(q^{-1})P(q^{-1})w(t) \quad (53)$$

La figure 10 ci-dessous récapitule le principe de cette structure à modèles de référence.

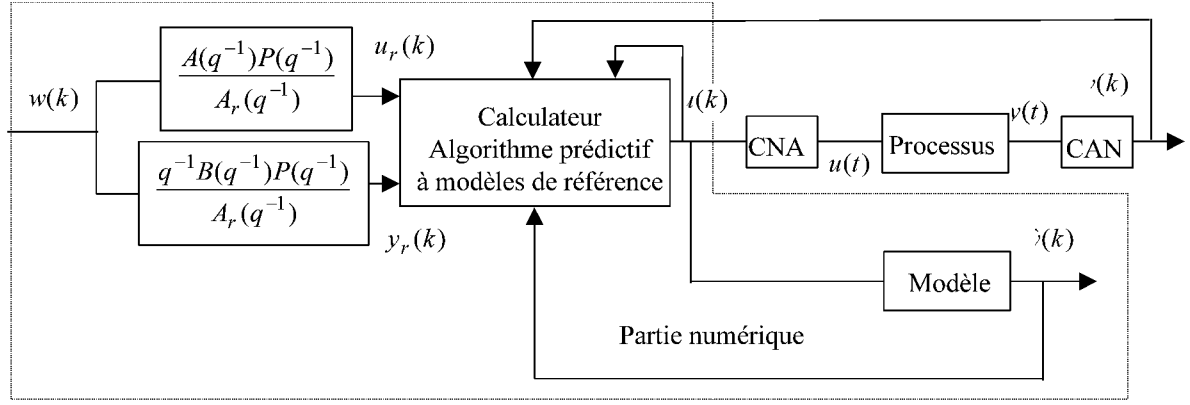


Figure 10 : Principe de l'algorithme GPC / MRM

La fonction de coût est désormais une somme pondérée portant sur les carrés des erreurs prédites en sortie et sur les carrés des incréments des erreurs de commande futures :

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \varepsilon_y^2(t+j) + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} \varepsilon_u^2(t+j-1) \quad (54)$$

avec : $\varepsilon_u(t+j) \equiv 0$ for $j \geq N_u$

et :
$$\begin{cases} \varepsilon_y(t+j) = \hat{y}(t+j) - y_r(t+j) \\ \varepsilon_u(t+j) = \Delta u(t+j) - \Delta u_r(t+j) \end{cases}$$

Notons que les contraintes terminales pourraient être incluses de la même façon que pour la structure GPC simple, aboutissant à un régulateur linéaire. Cette stratégie n'est pas développée ici afin de ne pas alourdir la présentation.

4.2 RESOLUTION

À partir des relations (50), (51) et (53), on constate que les incréments des erreurs de commande d'une part, et les erreurs de sortie d'autre part, sont liés par la relation :

$$A(q^{-1})\varepsilon_y(t) = B(q^{-1})\varepsilon_u(t-1) + \xi(t) \quad (55)$$

ce qui correspond exactement à la structure CARIMA (50), reparamétrisée en terme de signaux portant sur les erreurs entrée / sortie. Toute la théorie développée précédemment dans le cas de l'algorithme GPC 'classique' peut donc être conservée, en remplaçant dans le processus de minimisation y par ε_y , Δu par ε_u , et w par 0 (le système doit en effet suivre une consigne d'erreur nulle). Dès lors, la minimisation du critère quadratique (54) aboutit à la séquence optimale :

$$\mathbf{\varepsilon}_{u \text{ opt}} = -\mathbf{N}[\mathbf{i}f \ \varepsilon_y(t) + \mathbf{i}h \ \varepsilon_u(t-1)] \quad (56)$$

avec : $\mathbf{\varepsilon}_{u \text{ opt}} = [\varepsilon_u(t)_{\text{opt}} \ \cdots \ \varepsilon_u(t+N_u-1)_{\text{opt}}]^T$

Là encore, seule la première valeur de la séquence (56) est appliquée au système, selon le principe de l'horizon fuyant :

$$\varepsilon_{u\ opt}(t) = -\mathbf{n}_1^T [\mathbf{i}f\ \varepsilon_y(t) + \mathbf{i}h\ \varepsilon_{u\ opt}(t-1)] \quad (57)$$

On en déduit le régulateur polynomial équivalent de ce problème reformulé en terme de signaux d'erreurs :

$$S(q^{-1})\varepsilon_{u\ opt}(t) = -R(q^{-1})\varepsilon_y(t) \quad (58)$$

avec :

$$\begin{aligned} S(q^{-1}) &= (1 + \mathbf{n}_1^T \mathbf{i}h\ q^{-1}) & \text{degré}[S(q^{-1})] &= \text{degré}[B(q^{-1})] \\ R(q^{-1}) &= \mathbf{n}_1^T \mathbf{i}f & \text{degré}[R(q^{-1})] &= \text{degré}[A(q^{-1})] \end{aligned}$$

La commande appliquée sur le système se déduit finalement de l'équation aux différences :

$$S(q^{-1})\Delta u(t) = -R(q^{-1})y(t) + T_r(q^{-1})w(t) \quad (59)$$

avec, d'après les relations (51) et (53) :

$$T_r(q^{-1}) = \frac{P(q^{-1})}{A_r(q^{-1})} \left(A(q^{-1})\Delta(q^{-1})S(q^{-1}) + q^{-1}B(q^{-1})R(q^{-1}) \right) \quad (60)$$

Cette loi de commande se résume de nouveau en une structure RST, avec les mêmes polynômes $R(q^{-1})$ et $S(q^{-1})$ que ceux obtenus par l'algorithme classique, seul le polynôme $T(q)$ est modifié, devenant une fraction rationnelle causale et considérant explicitement le modèle de poursuite choisi par l'utilisateur.

En outre, le calcul de la boucle fermée entrée / sortie permet de vérifier que la dynamique résultante est définie par le modèle de poursuite, ce qui n'est bien sûr pas le cas de la fonction de transfert entre la sortie et la perturbation.

4.3 EXEMPLE : COMPARAISON GPC – GPC/MRM

Considérons dans ce paragraphe l'application des deux algorithmes précédents à un processus continu piloté par calculateur, de fonction de transfert continue :

$$H(s) = \frac{1}{s^2(1+s)} \quad (61)$$

On choisit comme période d'échantillonnage $T_e = 0,5\text{ s}$.

Ce processus double intégrateur est instable en boucle ouverte et relativement délicat à asservir.

4.3.1 Application de la structure GPC

Les résultats et courbes ci-dessous ont été obtenus pour un jeu de paramètres satisfaisant tous les critères de stabilité et de robustesse énoncés au paragraphe 3.7, soit :

$$N_1 = 1 - N_2 = 16 - N_u = 1 - \lambda = 21 \quad (62)$$

- Avec ces valeurs, le régulateur polynomial équivalent prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} R(q^{-1}) &= 13,6635 - 33,5313q^{-1} + 27,0495q^{-2} - 7,1195q^{-3} \\ S(q^{-1}) &= 1 + 0,9124q^{-1} + 0,1689q^{-2} \\ T(q) &= 8,6120 \cdot 10^{-6}q + 6,1610 \cdot 10^{-5}q^2 + 1,8710 \cdot 10^{-4}q^3 + 4,0310 \cdot 10^{-4}q^4 + \\ &\quad + 7,1910 \cdot 10^{-4}q^5 + 1,1410 \cdot 10^{-3}q^6 + 1,6810 \cdot 10^{-3}q^7 + 2,3310 \cdot 10^{-3}q^8 + \\ &\quad + 3,0810 \cdot 10^{-3}q^9 + 3,9610 \cdot 10^{-3}q^{10} + 4,9510 \cdot 10^{-3}q^{11} + 6,0610 \cdot 10^{-3}q^{12} + \\ &\quad + 7,2910 \cdot 10^{-3}q^{13} + 8,6310 \cdot 10^{-3}q^{14} + 0,0101q^{15} + 0,0117q^{16} \end{aligned}$$

- Les pôles de la boucle ouverte corrigée et de la boucle fermée sont donnés par :

Pour la boucle ouverte : $z_1 = 1$ (triple) ; $z_2 = -0,258$; $z_3 = 0,607$; $z_4 = -0,6543$

Pour la boucle fermée : $z_1 = 0,912 + j0,089$; $z_2 = 0,912 - j0,089$
 $z_3 = 0,012$; $z_4 = 0,6062$

- Les diagrammes fréquentiels suivants illustrent la stabilité et la robustesse du système corrigé.

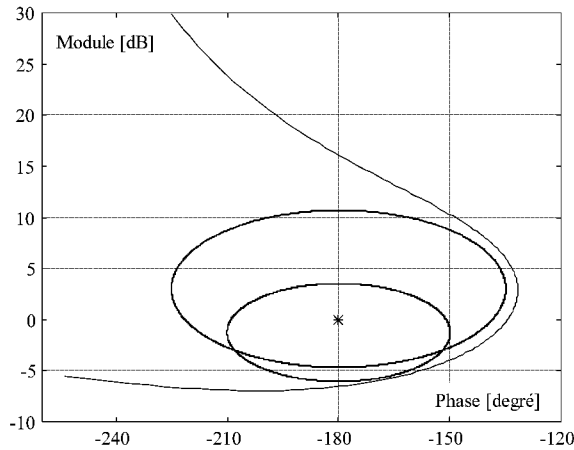


Figure 11 : Diagramme de Black

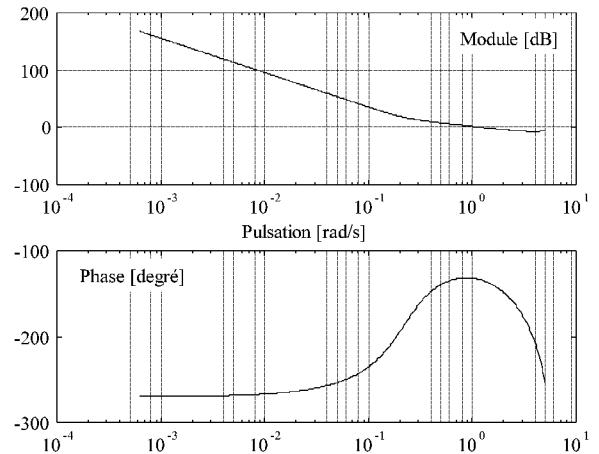


Figure 12 : Diagramme de Bode

- Les figures ci-dessous donnent les signaux de sortie et de commande en réponse à un échelon de consigne de 1 V.

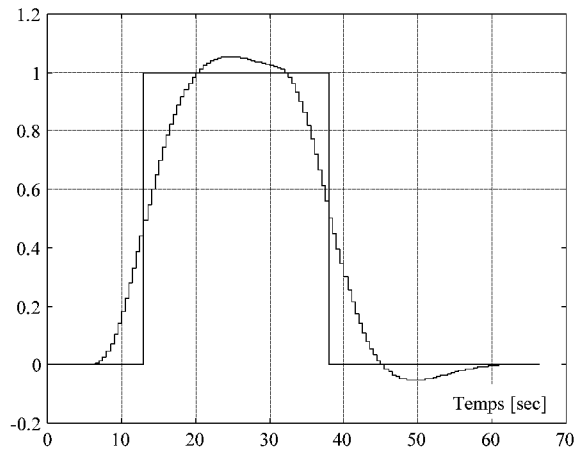


Figure 13 : Consigne et sortie

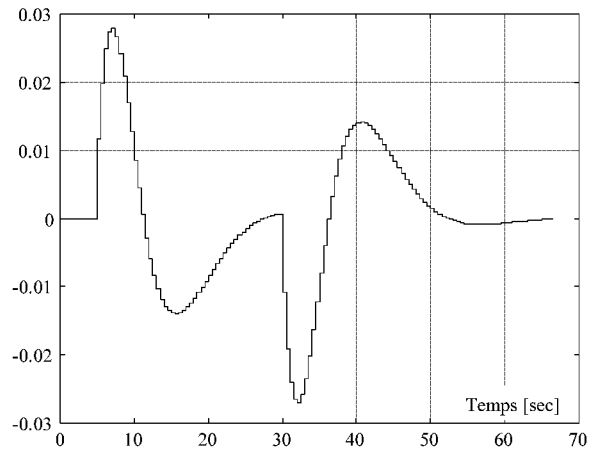


Figure 14 : Commande

- Les figures ci-dessous donnent les signaux de sortie et de commande en réponse à une perturbation de 0,1 V à entrée nulle.

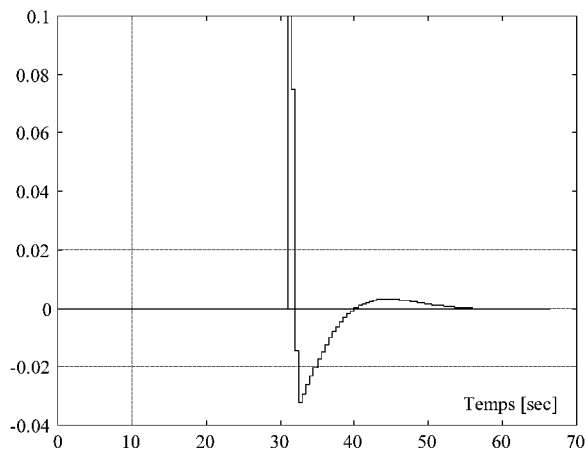


Figure 15 : Consigne et sortie

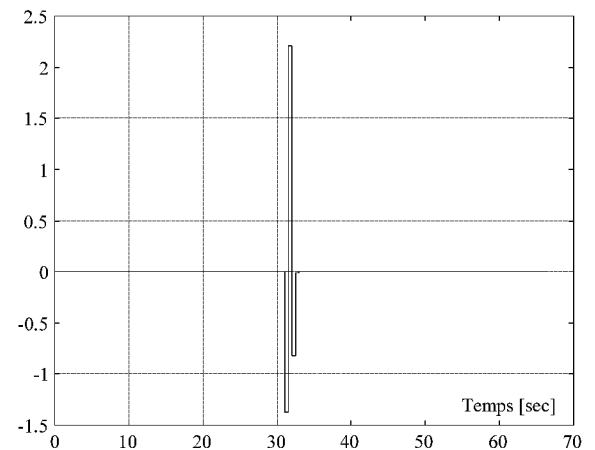


Figure 16 : Commande

- Les figures ci-dessous donnent les signaux de sortie et de commande en réponse à un échelon de consigne de 1 V, lorsque le système est désadapté (gain de 1 à 0,7).

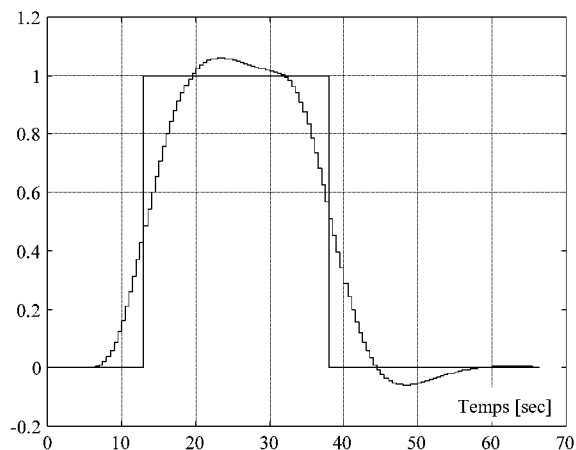


Figure 17 : Consigne et sortie

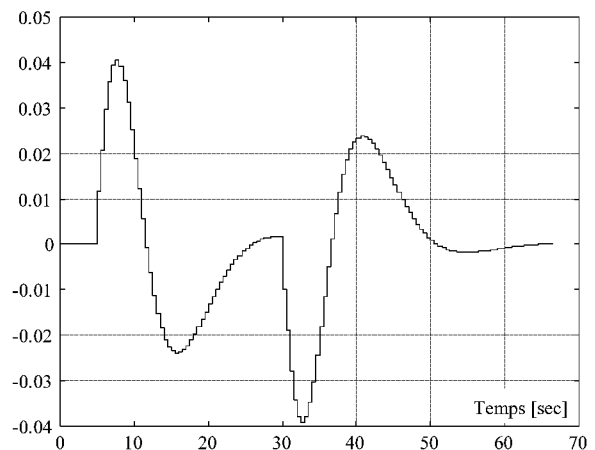


Figure 18 : Commande

- Les figures ci-dessous donnent les signaux de sortie et de commande en réponse à un échelon de consigne de 1 V, lorsque le système est désadapté (gain de 1 à 1,3).

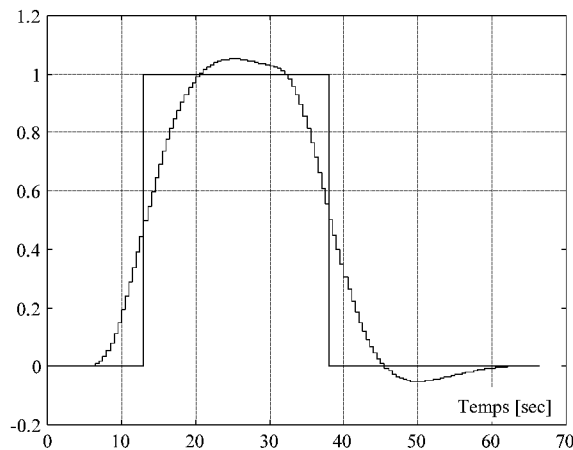


Figure 19 : Consigne et sortie

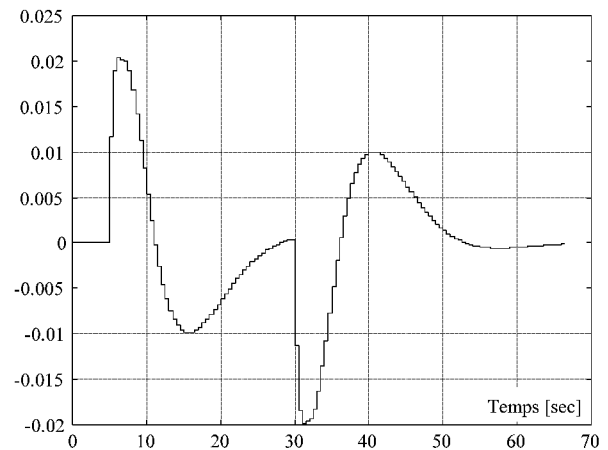


Figure 20 : Commande

- Les figures ci-dessous donnent les signaux de sortie et de commande en réponse à une consigne de 1 V, lorsque le système est désadapté (constante de temps de 1 à 0,5).

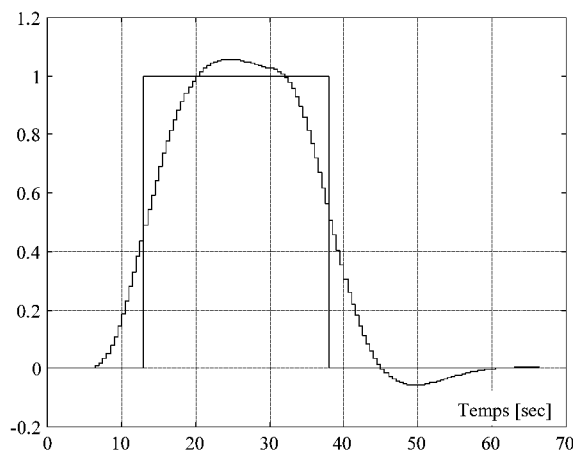


Figure 21 : Consigne et sortie

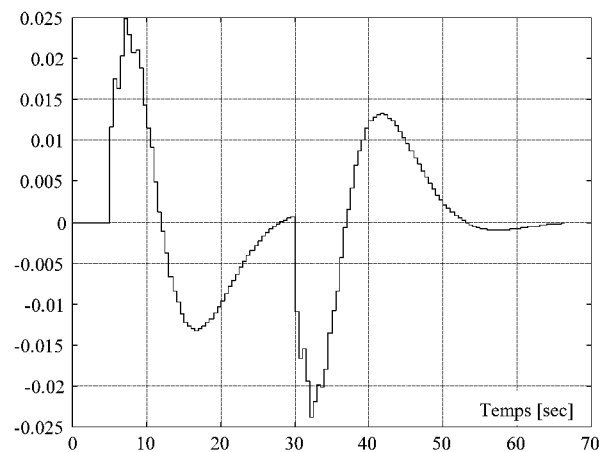


Figure 22 : Commande

4.3.2 Application de la structure GPC/MRM

Les résultats et courbes ci-dessous ont été obtenus pour le même jeu de paramètres que précédemment, satisfaisant tous les critères de stabilité et de robustesse énoncés au paragraphe 3.7.

Le modèle de poursuite est choisi sous la forme : $A_r(s) = (s+1)^2$, de façon à obtenir un comportement en boucle fermée ne présentant pas de dépassement (puisque la dynamique entrée / sortie est fixée par ce modèle de poursuite).

- Les figures ci-dessous donnent les signaux de sortie et de commande en réponse à un échelon de consigne de 1 V.

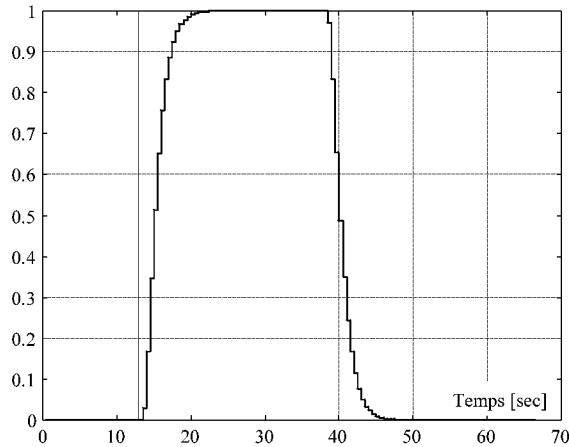


Figure 23 : Consigne, sortie et trajectoire de référence

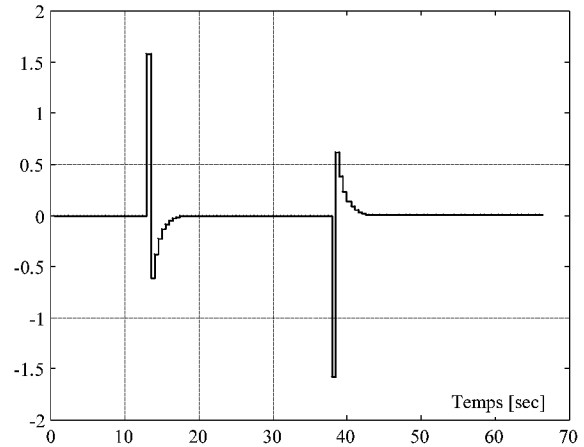


Figure 24 : Commande et commande de référence

- Les figures ci-dessous donnent les signaux de sortie et de commande en réponse à une perturbation de 0,1 V à entrée nulle.

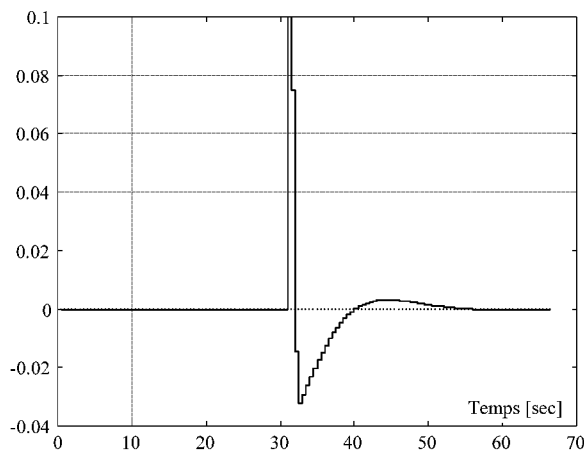


Figure 25 : Consigne, sortie et trajectoire de référence

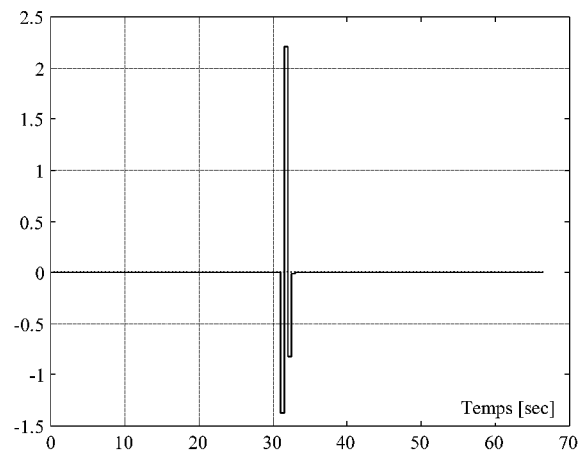


Figure 26 : Commande et commande de référence

On constate bien que la réponse entrée / sortie correspond à celle que l'on s'est imposée par l'intermédiaire du modèle de poursuite (réponse sans dépassement), alors que la réponse à la perturbation se fait avec la dynamique fixée par le régulateur, comme pour l'algorithme GPC 'classique'.

- Les figures ci-dessous donnent les signaux de sortie et de commande en réponse à un échelon de consigne de 1 V, lorsque le système est désadapté (gain de 1 à 0,7).

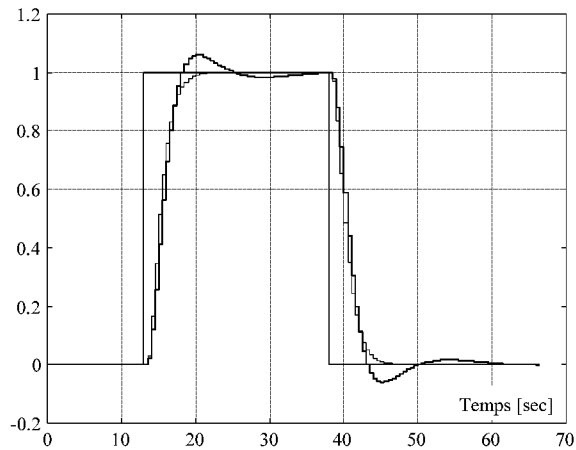


Figure 27 : Consigne, sortie et trajectoire de référence

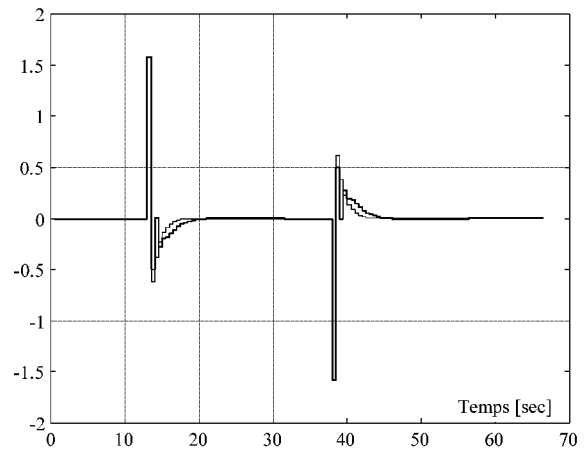


Figure 28 : Commande et commande de référence

- Les figures ci-dessous donnent les signaux de sortie et de commande en réponse à une consigne de 1 V, lorsque le système est désadapté (constante de temps de 1 à 0,5).

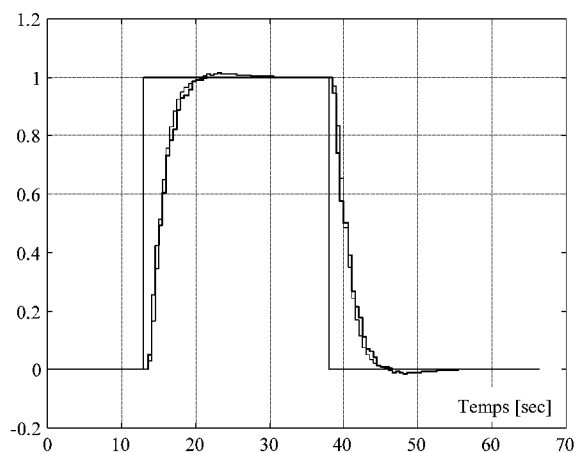


Figure 29 : Consigne, sortie et trajectoire de référence

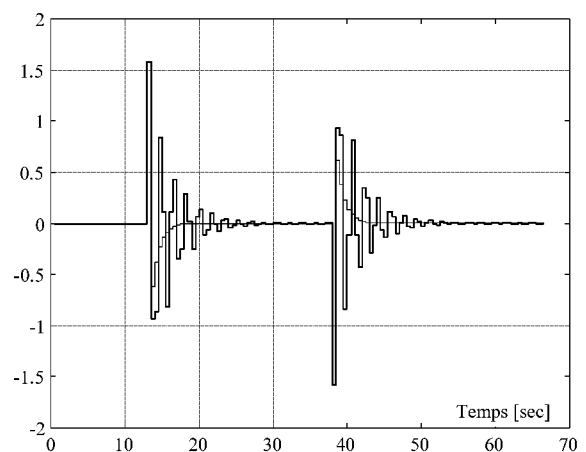


Figure 30 : Commande et commande de référence

5 EXTENSION A UNE STRUCTURE GPC CASCADE

5.1 SYNTHÈSE DES REGULATEURS

La structure cascade proposée permet, dans le cas d'une version à deux boucles, de piloter simultanément deux variables (vitesse et position par exemple pour la régulation de systèmes électromécaniques). Elle inclut dans la boucle interne une structure prédictive à modèles de référence multiples développée ci-dessus, couplée à un algorithme G.P.C. classique pour la boucle externe, comme indiqué Figure 31.

La synthèse du régulateur de la boucle interne est envisagée selon la stratégie G.P.C. / M.R.M. du paragraphe 4, de sorte que le régulateur interne R_2 , S_2 et T_2 est implémenté en final par l'équation aux différences suivantes :

$$S_2(q^{-1})\Delta u(t) = -R_2(q^{-1})y_2(t) + T_2(q^{-1})w_2(t) \quad (63)$$

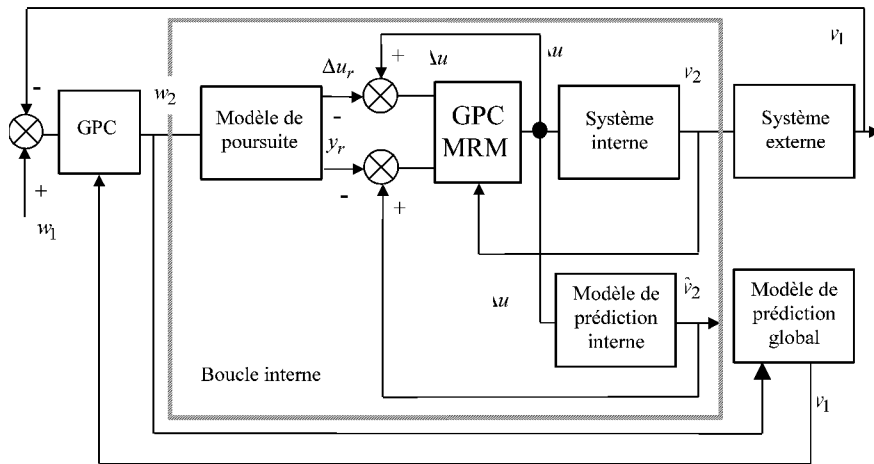


Figure 31 : Structure prédictive cascade

Le modèle de prédiction utilisé pour la synthèse du régulateur externe est composé de deux termes, d'une part le modèle correspondant au comportement asymptotique de la boucle interne fermée, d'autre part le modèle issu du système externe (défini par les polynômes $A_1(q^{-1})$ et $B_1(q^{-1})$), selon la relation :

$$\frac{y_1(t)}{w_2(t)} = \frac{q^{-1}B_{1r}(q^{-1})}{A_{1r}(q^{-1})} \approx \frac{q^{-1}B_r(q^{-1})}{A_r(q^{-1})} \frac{B_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1})} \quad (64)$$

Pour achever cette structure cascade, un algorithme G.P.C. 'classique' est mis au point, procurant le régulateur externe sous une forme polynomiale RST équivalente, ce régulateur étant également implanté par l'intermédiaire d'une deuxième équation aux différences :

$$S_1(q^{-1})\Delta w_2(t) = -R_1(q^{-1})y_1(t) + T_1(q)w_1(t) \quad (65)$$

L'implantation globale de cette structure à deux boucles nécessite donc la programmation de deux équations aux différences, avec des polynômes de faible degré, et donc un temps de calcul de l'algorithme faible. Cette structure pouvant se généraliser à un nombre quelconque de boucles s'avère tout à fait adaptée à des boucles temps réel rapides, tout comme les structures monoboucles envisagées précédemment. Il est à noter enfin que seule a été présentée une structure cascade 'monocadence' (c'est à dire avec une seule et même période d'échantillonnage pour les deux boucles). D'autres structures prédictives cascades de type 'multicadences' ont été par ailleurs développées.

5.2 APPLICATION A LA COMMANDE CASCADE VITESSE/POSITION D'UN MOTEUR ASYNCHRONE

L'algorithme GPC nécessitant très peu d'opérations temps réel permet l'utilisation de périodes d'échantillonnage faibles et peut donc s'appliquer sans problèmes à la commande de systèmes électromécaniques. L'application ci-dessous illustre ainsi l'impact d'une structure GPC sans contrainte terminale pour la commande cascade vitesse/position d'un moteur alternatif asynchrone.

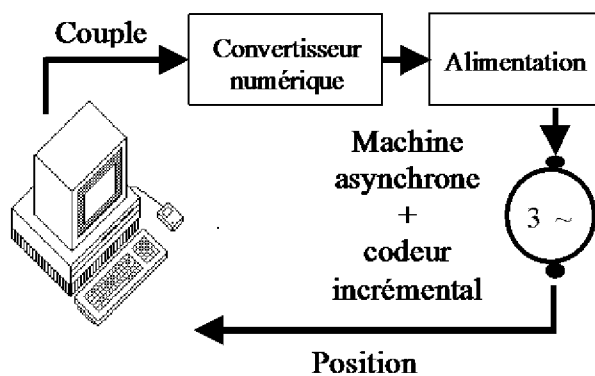


Figure 32 : Structure du banc d'essais

Le banc d'essais comprend une machine asynchrone (de vitesse nominale 3000 tours/min, couple nominal 6 Nm, puissance 1,9 kW), un codeur incrémental (32 bits avec 5000 points par tour), des convertisseurs numériques (convertisseurs 12 bits associés à un module d'acquisition rapide, réalisant une conversion en moins de 80 μ s), un PC et une alimentation en courant (trois boucles de courant numériques avec une stratégie de commande par flux orienté).

Les paramètres de réglage des algorithmes GPC des deux boucles ont été choisis de façon à satisfaire les spécifications de stabilité et de robustesse définies au paragraphe 3.7, avec les valeurs suivantes :

$$\text{Boucle interne (GPC/MRM)} : \quad [N_{12}, N_{22}, N_{u2}, \lambda_2] = [1, 7, 1, 400]$$

$$\text{Modèle de poursuite} : \quad \xi = 0,7, \omega_0 = 500 \text{ rad/s}$$

$$\text{Boucle externe (GPC)} : \quad [N_{11}, N_{21}, N_{u1}, \lambda_1] = [1, 7, 1, 0.0001768]$$

La Figure 33 reproduit les diagrammes de Black des deux boucles corrigées, illustrant que le tracé de chacune des boucles ouvertes corrigées reste bien à l'extérieur de la zone interdite, garantissant dès lors la validation des spécifications.

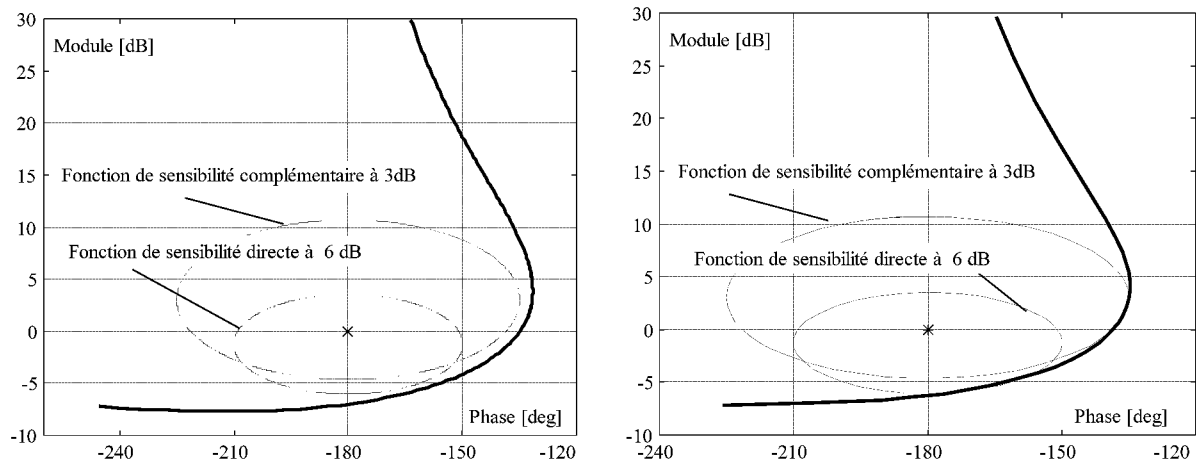


Figure 33 : Diagrammes de Black des boucles interne et externe corrigées

Les Figures 34 et 35 reproduisent les réponses du moteur à une consigne de position trapézoïdale variant de 0 à 60 rad, avec une consigne de vitesse ne devant pas dépasser ± 250 rad/s, soit ± 2500 tours/min . On constate des réponses en position et en vitesse ne présentant aucun dépassement, ce qui représente bien sûr une spécification impérative dans le domaine de la machine-outil (tout dépassement correspondant à une erreur de découpe par exemple). On remarque également l'absence de toute erreur de suivi et de positionnement, ainsi qu'une commande peu chahutée.

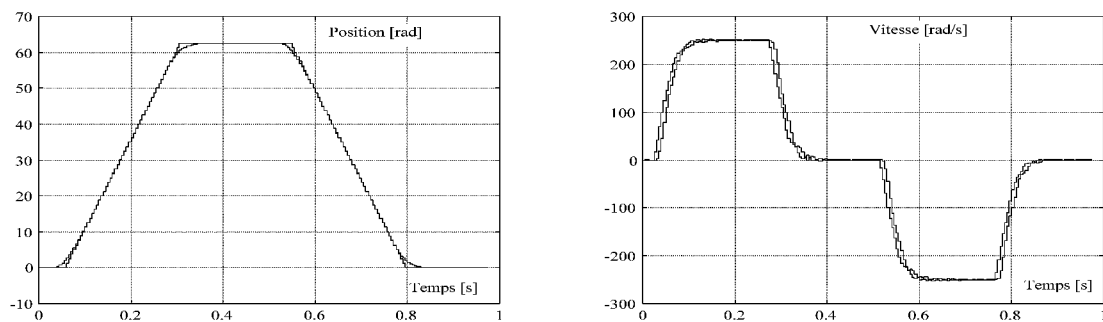


Figure 34 : Position angulaire et vitesse angulaire du moteur

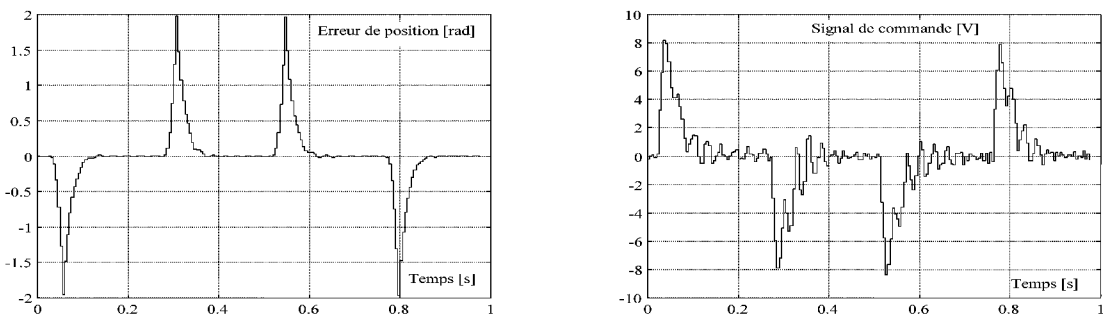


Figure 35 : Erreur de position et signal de commande (couple)

6 ALGORITHME PFC

Cette deuxième structure de commande prédictive est introduite ici en précisant les grandes idées de la méthode, depuis la forme du modèle, le critère quadratique, jusqu'à l'examen des paramètres de réglage. Pour ne pas alourdir la présentation, le formalisme et les calculs nécessaires à la minimisation analytique du critère seront omis. Le lecteur pourra consulter les références données au paragraphe 7 pour les détails de la minimisation dans le cadre de structures simple et cascade.

6.1 DEFINITION DU MODELE NUMERIQUE

Il n'y a comme pour G.P.C. aucune restriction pour la forme du modèle, mais l'approche représentation par variables d'état est privilégiée. Les premières versions de P.F.C. utilisaient même une représentation par convolution à l'aide des coefficients de la réponse impulsionnelle discrète.

Si l'on note $u(t)$ et $s_m(t)$ respectivement l'entrée et la sortie du modèle, ce modèle est classiquement représenté par le système d'équations :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_m(t+1) = \mathbf{F} \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{G} u(t) \\ s_m(t) = \mathbf{H} \mathbf{x}_m(t) \end{cases} \quad (66)$$

6.2 CHOIX D'UNE TRAJECTOIRE DE REFERENCE

La trajectoire de référence, initialisée sur la sortie du processus à l'instant t , spécifie la manière selon laquelle on souhaite que le processus rallie la consigne sur un horizon de prédiction donné. Tout choix est possible mais le plus simple consiste à prendre une dynamique du premier ordre pour l'écart entre la consigne et la trajectoire de référence. Si l'on note $s_p(t)$ la sortie du système et $w(t)$ la consigne à suivre, cette trajectoire de référence $s_R(t)$ est alors définie par la relation :

$$[w(t+j) - s_R(t+j)] = \alpha^j [w(t) - s_p(t)] \quad (67)$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$ est un paramètre qui conditionne la rapidité du ralliement désiré :

$$\alpha = \exp\left(-\frac{3T_e}{T_r}\right) \quad (68)$$

avec T_e la période d'échantillonnage et T_r le temps de réponse en boucle fermée.

6.3 DIFFERENCE OBJET – MODELE

P.F.C. permet d'ajuster la prédiction de la sortie du processus obtenue par le modèle, en tenant compte des erreurs de modélisation, d'identification et d'éventuelles perturbations. On introduit pour cela un signal mesurant l'écart entre le système et le modèle, appelé *dom*, différence objet – modèle :

$$dom(t) = s_p(t) - s_m(t) \quad (69)$$

Le but est alors de fournir une prédiction future de cet écart $dom(t+j)$ de sorte que l'on ait :

$$\hat{s}_p(t+j) = \hat{s}_m(t+j) + dom(t+j) \quad (70)$$

La prédiction 'plate' qui consiste à prendre :

$$dom(t+j) = dom(t) = s_p(t) - s_m(t) \quad (71)$$

correspond au cas d'un autocompensateur de degré 0 capable de contrer un écart statique. En général, l'autocompensateur s'écrit :

$$dom(t+j) = s_p(t) - s_m(t) + \sum_{i=1}^{d_e} e_i(t) j^i \quad (72)$$

où d_e est le degré de l'extrapolateur.

6.4 STRUCTURATION DE LA COMMANDE FUTURE

De façon tout à fait originale par rapport aux autres techniques prédictives, la commande future est ici structurée sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions choisies au préalable, appelées 'fonctions de base' et notées $\{u_{b_k}\}, k = 1 \dots n_b$:

$$u(t+j) = \sum_{k=1}^{n_b} \mu_k(t) u_{b_k}(j) \quad (73)$$

Le calcul de la séquence de commande future nécessite alors la détermination, à chaque instant t , des coefficients inconnus $\{\mu_k\}, k = 1 \dots n_b$. De plus, d'après la stratégie de l'horizon glissant, seule la première valeur de la séquence est appliquée, ce qui exige que le choix des fonctions de base doit être tel qu'au moins une fonction vérifie $u_{b_k}(0) \neq 0$.

Classiquement, les fonctions de base sont des fonctions canoniques (échelon, rampe, parabole), choisies selon la nature de la consigne et le caractère intégrateur du processus. On donne ci-dessous la valeur de l'erreur $w - s_p$ dans le cas d'un système non intégrateur.

Fonctions Entrées	Échelon	Échelon + rampe	Échelon + rampe + parabole
Échelon	0	0	0
Rampe	Cte $\neq 0$	0	0
Parabole	∞	Cte $\neq 0$	0

Tableau 1 : Erreur $w - s_p$ pour un système non intégrateur

6.5 STRUCTURE DU PREDICTEUR OPTIMAL

La sortie prédite $s_m(t+j/t)$ est décomposée de façon classique en réponse lâchée et réponse forcée :

$$\hat{s}_m(t+j/t) = s_{mL}(t+j) + s_{mF}(t+j) \quad (74)$$

avec compte tenu des fonctions de base et du modèle d'état :

$$\begin{cases} s_{mF}(t+j) = \sum_{k=1}^{n_b} \mu_k(t) s_{mbk}(j) \\ s_{mL}(t+j) = \mathbf{H} \mathbf{F}^j \mathbf{x}_m(t) \end{cases} \quad (75)$$

s_{mbk} représentant la réponse forcée du modèle à l'entrée u_{bk} .

Si une structure polynomiale entrée / sortie est choisie, le prédicteur optimal prend une forme similaire à celle développée dans le cas G.P.C.

6.6 DEFINITION DU CRITERE QUADRATIQUE, NOTION DE POINTS DE COÏNCIDENCE

La loi de commande P.F.C. est obtenue par minimisation d'un critère quadratique portant sur les erreurs futures avec un terme de pondération sur la commande :

$$J = \sum_{j=1}^{n_h} [\hat{s}_p(t+h_j) - s_R(t+h_j)]^2 + \lambda u^2(t) \quad (76)$$

À partir des équations (67), (70) et (71), le critère ainsi choisi minimise l'écart entre la sortie du processus prédite et la trajectoire de référence en un certain nombre de points appelés points de coïncidence : soient h_j ces points et n_h leur nombre. La démarche suivie lors de la minimisation du critère, devant aboutir aux commandes futures structurées par la relation (73), est résumée Figure 36.

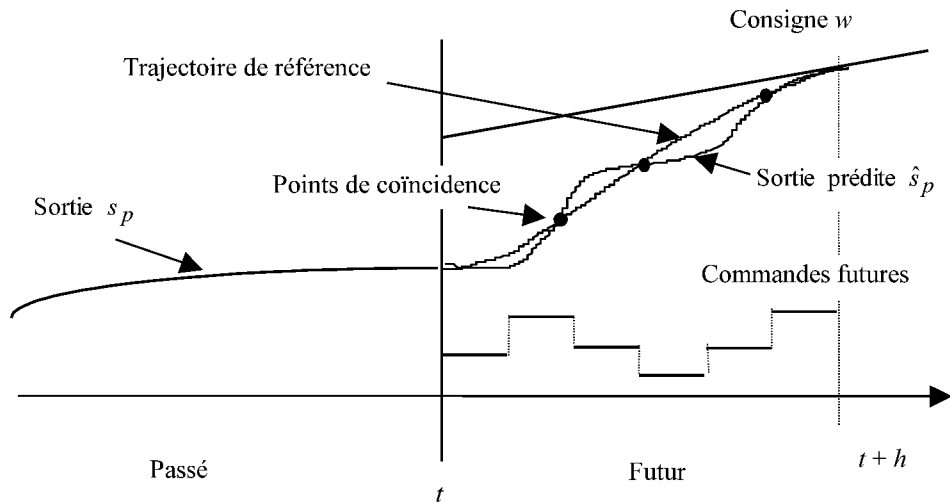


Figure 36 : Trajectoire de référence et points de coïncidence

Comme pour la Commande Prédictive Généralisée, la minimisation (non détaillée ici) du critère précédent conduit à un régulateur polynomial équivalent sous forme RST représenté Figure 4.

6.7 PARAMETRES DE REGLAGE

À partir des développements théoriques précédents, il apparaît que la mise en œuvre d'une loi de commande prédictive fonctionnelle implique le choix des paramètres suivants :

- T_r : temps de réponse souhaité. Ce paramètre est utilisé pour préciser la période d'échantillonnage si nécessaire. Il intervient également dans la définition du coefficient α de la trajectoire de référence ;
- n_b et $u_{b,k}$: le nombre de fonctions de base et leur nature. Ces paramètres sont figés dès lors que la nature du signal de consigne et le caractère intégrateur du processus sont connus ;
- n_h et h_j : le nombre de points de coïncidence et leur emplacement. La résolution mathématique requiert un nombre d'équations supérieur ou égal au nombre d'inconnues. De façon classique, on choisit $n_h = n_b$.
- Les points de coïncidence sont placés à l'intérieur de l'horizon de prédiction, borné par le temps de réponse souhaité. Plus un point sera placé au début de l'horizon, plus le système aura tendance à être rapide.
- λ : coefficient de pondération sur la commande. Ce paramètre est lié au gain du système, par une relation similaire à celle définie en G.P.C.

Le choix des paramètres s'avère donc, dans le cas monovarié, d'une complexité tout à fait similaire à celle observée dans le cas d'une structure de commande prédictive généralisée, puisque seuls les points de coïncidence (souvent restreints à un seul) et le coefficient de pondération sur la commande sont à fixer, équivalents à l'horizon N_2 et au coefficient λ du G.P.C.

6.8 COMPARAISON GPC / PFC SUR UN SYSTEME FLEXIBLE

Les deux méthodes prédictives GPC et PFC ont été appliquées à la commande du système formé de trois poulies reliées par deux courroies, représenté Figure 32, et proposé dans le cadre du benchmark 'ECC 95' [European Control Conference 1995]. Trois configurations (à vide ou 0 %, à mi-charge ou 50%, à pleine charge ou 100 %) sont envisageables, selon la charge ajoutée en bout d'arbre. Ces trois configurations ont été identifiées pour une période d'échantillonnage de 50 ms, en incluant un retard pur $d = 2$, fournissant les trois modèles polynomiaux entrée/sortie suivants :

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - d)$$

- *Modèle à vide (0%) :*

$$B(q^{-1}) = 0,28261q^{-1} + 0,50666q^{-2}$$

$$A(q^{-1}) = 1 - 1,41833q^{-1} + 1,58939q^{-2} - 1,31608q^{-3} + 0,88642q^{-4}$$

- *Modèle à mi-charge (50%) :*

$$B(q^{-1}) = 0,10276q^{-1} + 0,18123q^{-2}$$

$$A(q^{-1}) = 1 - 1,99185q^{-1} + 2,20265q^{-2} - 1,84083q^{-3} + 0,89413q^{-4}$$

- *Modèle pleine charge (100%) :*

$$B(q^{-1}) = 0,06408q^{-1} + 0,10407q^{-2}$$

$$A(q^{-1}) = 1 - 2,09679q^{-1} + 2,31962q^{-2} - 1,93353q^{-3} + 0,87129q^{-4}$$

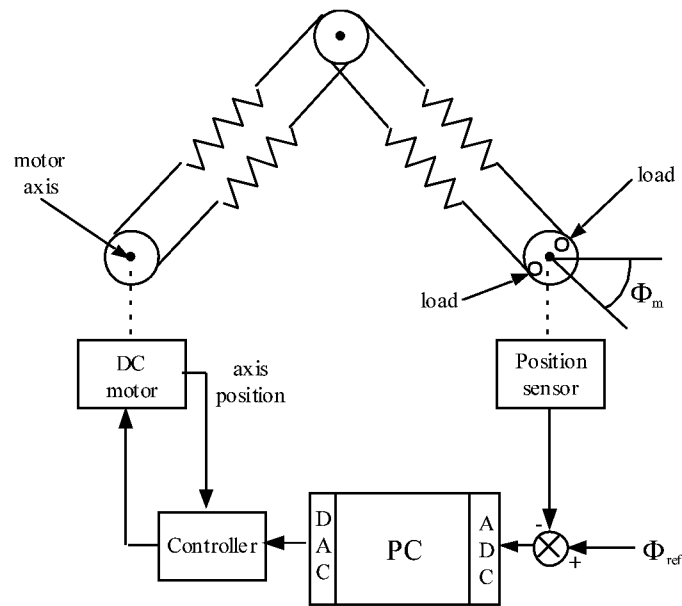


Figure 37 : Schéma d'ensemble du Benchmark 'ECC'

L'intérêt de ce système est de présenter des modes souples avec des résonances importantes, variant en fonction de la charge. La Figure 38 illustre la réponse fréquentielle pour les trois configurations, dans le plan de Bode.

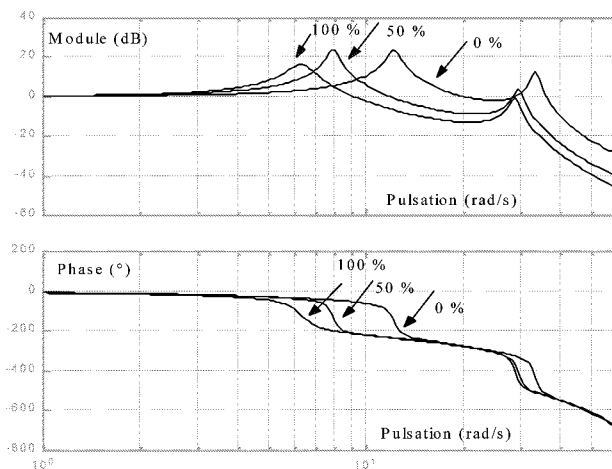


Figure 38 : Diagramme de Bode des trois configurations

Les spécifications imposées sont les suivantes :

- Synthèse d'un unique régulateur numérique robuste, pour une période d'échantillonnage de 50 ms, sous forme polynomiale RST,
- Processus décrit sous la forme CARIMA,
- Valeur maximale de la fonction de sensibilité directe inférieure à 6 dB, pour toutes les charges et toutes les fréquences,
- Marge de retard supérieure à 40 ms,
- Rejet parfait de perturbations constantes,
- Dépassement maximal en réponse indicielle inférieur à 10%, dans tous les cas,
- Temps de montée maximal (0,9 de la valeur finale) inférieur à 1 s, dans tous les cas,
- Rejet des perturbations filtrées par $1/A(q^{-1})$ en moins de 1,2 s (rejet à 90% de la valeur du maximum mesuré).

Les régulateurs synthétisés correspondent aux paramètres de réglage suivants :

Algorithme GPC : $[N_1, N_2, N_u, \lambda] = [9, 13, 3, 60]$

Algorithme PFC : $[N_h, N_b, \alpha, h, \lambda] = [1, 1, 0.1, 9, 3]$

Les Figures ci-dessous reproduisent, pour les deux algorithmes testés, les diagrammes de Bode et de Black des boucles ouvertes corrigées des trois configurations, le module de la fonction de sensibilité directe pour les trois configurations, enfin la réponse du système bouclé pour les trois configurations, successivement à un échelon de consigne puis un échelon de perturbation filtrée par $1/A(q^{-1})$.

Le tableau 2 récapitule les principales caractéristiques fréquentielles et temporelles obtenues pour les deux algorithmes et dans les trois configurations envisagées.

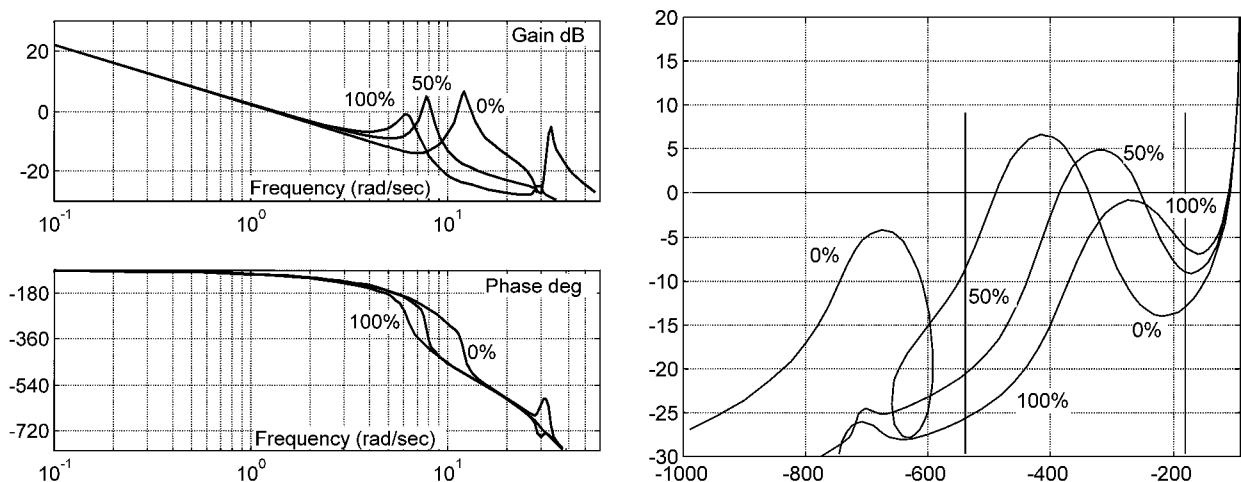


Figure 39 : Diagramme de Bode et de Black des trois configurations corrigées par GPC

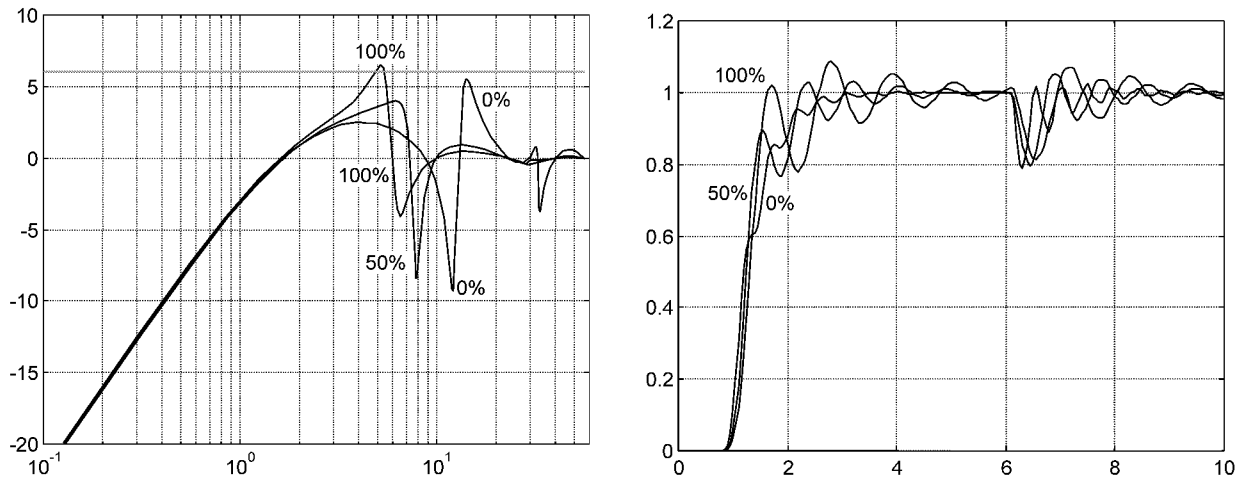


Figure 40 : Fonction de sensibilité directe et réponse à une consigne en échelon puis une perturbation en échelon des trois configurations corrigées par GPC

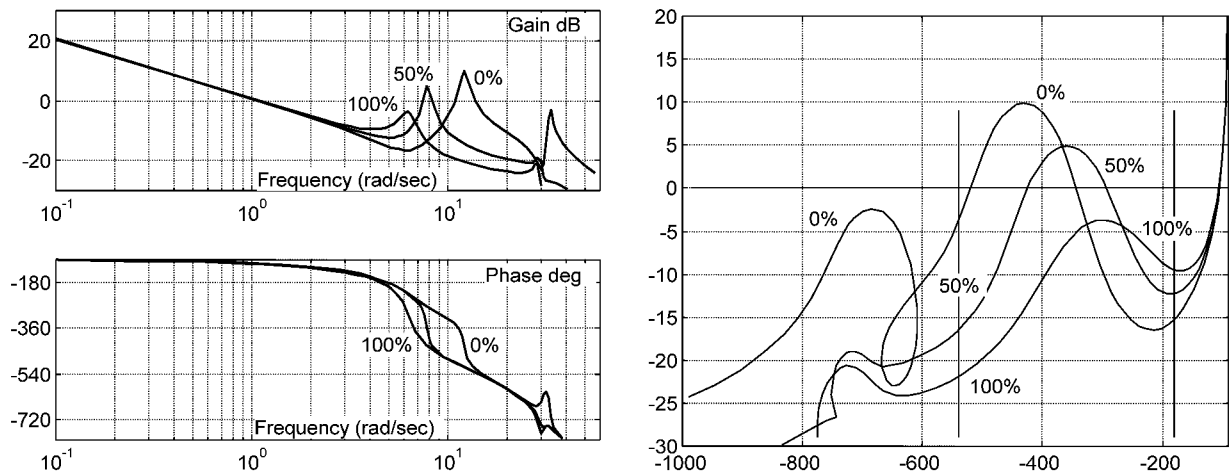


Figure 41 : Diagramme de Bode et de Black des trois configurations corrigées par PFC

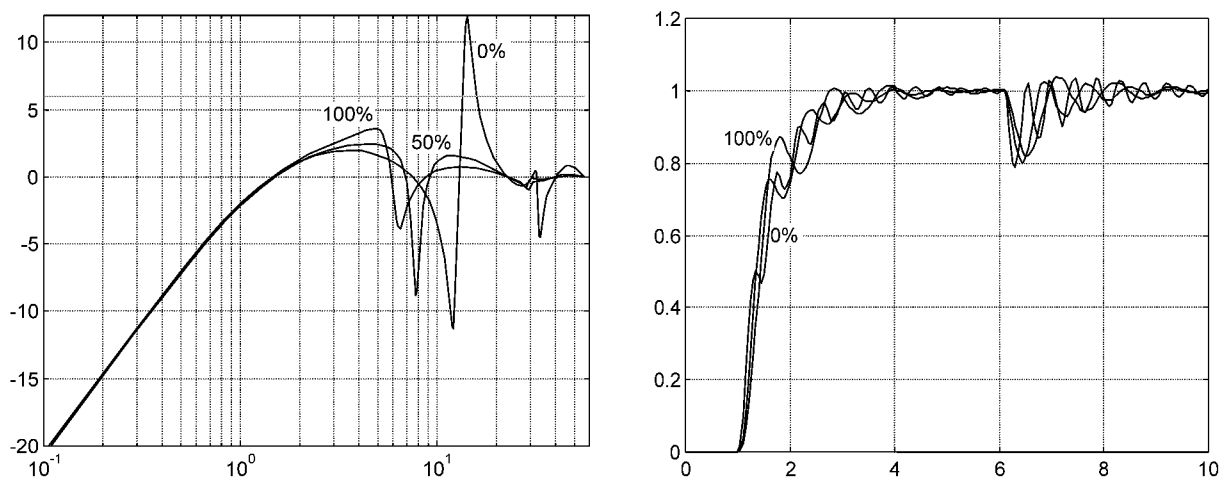


Figure 42 : Fonction de sensibilité directe et réponse à une consigne en échelon puis une perturbation en échelon des trois configurations corrigées par PFC

	GPC			PFC		
Charge	0 %	50 %	100 %	0 %	50 %	100 %
ω_0 (rad/s)	1,1	1,1	1,2	1	1	1
$\Delta\varphi$ (°)	47,7	72,3	69,8	20	76,2	73,3
ΔG (dB)	8,8	8,8	5,7	7	12	9,1
$ \sigma _{\max}$ (dB)	5,3	3,8	6,1	11	2,4	3,5
$\Delta\tau$ (s)	0,08	1,14	1,01	0,03	0,25	1,28
D (%)	0	< 5	9	< 5	< 5	< 5
T_r (s)	1,2	1,25	0,65	1,1	1,15	1,4

Tableau 2 : Récapitulatif des principales caractéristiques temporelles et fréquentielles

On constate dans les deux cas que les résultats sont tout à fait satisfaisants, tant en fréquentiel qu'en temporel, même si pour chacun des deux algorithmes, certaines spécifications ne sont pas validées (caractères gras dans le tableau précédent) pour certaines configurations.

7 CONCLUSION – PERSPECTIVES

7.1 CONCLUSION

Les méthodes prédictives envisagées lors des paragraphes précédents ont montré leur simplicité de conception et d'implantation, puisqu'elles se traduisent toujours, quelles que soient les versions considérées (simples ou cascades), hors contraintes inégalités, par la programmation temps réel de plusieurs équations aux différences, issues de la structure polynomiale RST du régulateur équivalent. Cette caractéristique fondamentale implique des boucles temps réel très rapides (les polynômes étant généralement de faibles degrés, très peu d'opérations en ligne s'avèrent nécessaires), puisque tous les calculs de la phase de synthèse sont effectués hors boucle dès lors que les paramètres de réglage sont choisis. Cette structure de commande est de fait tout indiquée pour des applications pour lesquelles les spécifications en terme de période d'échantillonnage sont de plus en plus sévères (usinage très grande vitesse en machine outils par exemple).

Parallèlement à cette simplicité d'implantation, les techniques prédictives permettent de satisfaire des spécifications très contraignantes, en terme de stabilité, rapidité et précision (statique ou dynamique), mais également de robustesse, vis à vis de perturbations ou de dynamiques négligées. Ce niveau de performances, que des commandes 'classiques' ne peuvent atteindre, se traduit cependant par une complexité accrue du choix des paramètres de réglage, non seulement par un nombre plus élevé, mais également liée à une interaction plus forte entre ces paramètres. C'est pourquoi il apparaît de plus en plus indispensable de concevoir, en plus de la synthèse classique du régulateur, un module d'aide au choix des paramètres de réglage, rendant l'implantation la plus transparente possible à un utilisateur qui n'est pas toujours spécialiste des lois de commande avancées proposées. Cette conception d'un module d'aide est de plus tout à fait envisageable à partir des outils classiques de l'Automatique pour l'étude et l'analyse de la stabilité et de la robustesse.

Tous les avantages listés ci-dessus – simplicité, performance, ... – font que ces techniques prédictives sont implantées dans de nombreuses applications industrielles, dans des domaines très variés, mais de préférence lorsque la trajectoire à suivre dans le futur est connue à l'avance, de façon à bénéficier pleinement de l'aspect anticipatif de cette loi de commande.

7.2 PERSPECTIVES : COMMANDE PREDICTIVE DISTRIBUEE ET HIERARCHISEE

Les raisons technologiques et économiques motivent le développement d'usines, de systèmes de fabrication et de réseaux d'échange de complexité toujours croissante. Ces systèmes complexes de grande taille sont souvent composés de plusieurs sous-systèmes qui interagissent et il peut être difficile de les contrôler avec une structure de commande centralisée, à cause de la complexité informatique, des problèmes de robustesse et de fiabilité et des limitations au sein du système de communication. Pour toutes ces raisons, de nombreux systèmes de commande distribués voient le jour, citons par exemple les structures complètement décentralisées, des structures de contrôle distribué avec échange d'information entre les régulateurs locaux et des structures hiérarchisées. En raison des problèmes que l'on

peut rencontrer et selon les objectifs à atteindre, il n'est pas toujours trivial de classer correctement toutes les solutions proposés et d'évaluer leurs avantages et désavantages. Dans le contexte du contrôle distribué et hiérarchisé, l'approche MPC est potentiellement très utile. En effet, il est facile pour tout régulateur local synthétisé par des techniques MPC de prédire ses actions de commande futures et les trajectoires d'état correspondant et de les transmettre aux unités de contrôle local voisines. Cette information est souvent fondamentale pour obtenir des performances comparables à celles idéales obtenues avec une structure de commande centralisée.

Les paragraphes ci-dessous font un résumé des stratégies rencontrées dans la littérature et parmi les applications industrielles.

7.2.1 Structure distribuée

Dans les structures de commande distribuées, comme l'exemple simple présenté Figure 43, on fait l'hypothèse qu'une certaine quantité d'information est transmise entre les régulateurs locaux (R1 et R2 Figure 43), de sorte que chaque régulateur connaisse à peu près le comportement des autres. Quand les régulateurs locaux sont construits selon une stratégie MPC, l'information transmise consiste en général en les commandes prédites ou les variables d'état calculées localement, pour que chaque régulateur local puisse prédire les effets de l'interaction sur la durée de l'horizon de prédiction. Dans le cas simple de la Figure 43, les régulateurs MPC R1 et R2 sont créés pour contrôler les systèmes S1 et S2. Si l'information échangée entre les régulateurs locaux (R1 et R2) concerne l'évolution prédite des états du système (x_1 et x_2), tout régulateur local doit seulement connaître la dynamique du système directement contrôlé (S1 et S2). A l'inverse, si les actions de commande prédites (u_1 et u_2) sont transmises, le régulateur local doit connaître le modèle de tous les sous-systèmes. Dans tous les cas, il semble que les protocoles de transmission et de synchronisation aient un impact important sur la performance qui peut être obtenue.

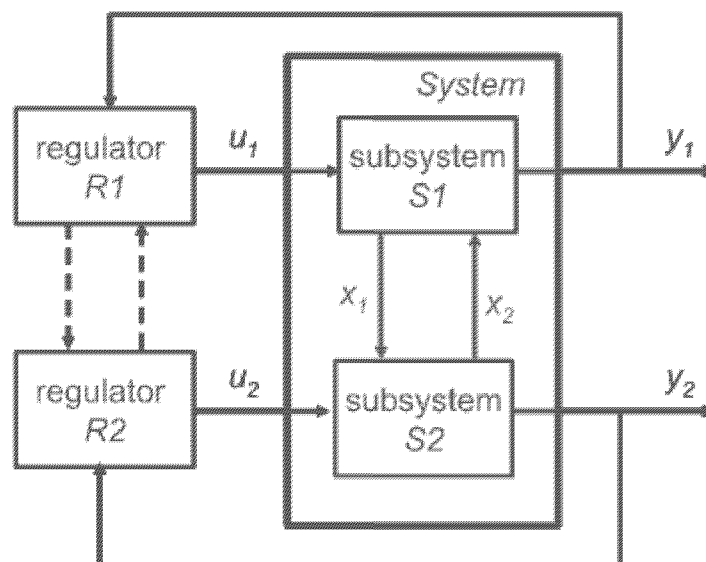


Figure 43 : Contrôle distribué d'un système à deux entrées et deux sorties

Dépendant de la topologie du réseau de communication, les algorithmes distribués MPC peuvent être classés comme indiqué ci-dessous :

- *Algorithmes complètement connectés* – l'information est transmise (et reçue) de n'importe quel régulateur local vers tous les autres ;
- *Algorithmes partiellement connectés* – l'information est transmise (et reçue) de n'importe quel régulateur local vers un sous-ensemble spécifique de sous-systèmes ;

Une structure d'information partiellement connectée peut être adéquate dans le cas des grands systèmes, comprenant plusieurs sous-systèmes légèrement connectés entre eux. Dans ce cas, imposer des restrictions pour les échanges d'information entre les systèmes qui n'interagissent pas directement provoque une détérioration négligeable de la performance.

Par ailleurs, l'échange d'information entre les régulateurs locaux peut être établi en accord avec différents protocoles :

- *Algorithmes non itératifs* – l'information est transmise (et reçue) par les régulateurs locaux seulement une fois à chaque instant d'échantillonnage ;
- *Algorithmes itératifs* – l'information peut être transmise (et reçue) par les régulateurs locaux plusieurs fois pendant chaque instant d'échantillonnage ;

Il est clair que la quantité d'information mise à disposition des régulateurs locaux dans le cadre des algorithmes itératifs est plus importante, de sorte qu'une procédure générale itérative puisse être établie pour arriver à un accord global sur les actions à adopter pendant la période d'échantillonnage.

On trouve également une deuxième classification :

- *Algorithmes indépendants* – les algorithmes distribués sont alors tels que chaque régulateur local minimise un indice local de performance ;
- *Algorithmes coopérants* – les algorithmes distribués sont conçus pour que chaque régulateur local minimise une fonction de coût globale ;

Il convient de noter que la combinaison correspondant à une méthode non itérative et coopérante est vide, puisque la coopération exige une forme quelconque de négociation entre les lois de commande locales.

Globalement, dans le cadre de systèmes complexes de grande taille (les applications typiques se situent par exemple dans les domaines de la chimie, pétrochimie, de l'énergie avec les échangeurs de chaleur et les centrales hydrauliques en cascade, de l'irrigation ...), l'efficacité est réelle comparativement à une structure centralisée.

Les principaux avantages obtenus résident dans une réduction de la charge informatique par rapport au cas centralisée et bien sûr de meilleures performances que dans le cas décentralisé, en raison de la communication concertée dans le cas distribué. D'un point de vue théorique, la négociation entre sous-systèmes fait souvent appel à des concepts issus de la théorie des jeux et du principe d'optimalité de Nash.

7.2.2 Structure hiérarchisée

Les structures de commande hiérarchisées sont plus difficiles à classer. On parle ainsi de commande hiérarchisée coordonnée ou de commande hiérarchisée de systèmes multi-niveaux.

Il est principalement nécessaire d'introduire un coordinateur pour des régulateurs locaux conçus de manière décentralisée. Dans le cas des systèmes multi-niveaux, l'action de commande est effectuée par un nombre de régulateurs qui fonctionnent à des échelles de temps différentes.

Beaucoup de systèmes industriels, économiques et sociologiques peuvent être décrits par une structure hiérarchisée. Le niveau le plus haut correspond à un système avec des dynamiques lentes. Le système peut être piloté en considérant son évolution sur une échelle de temps longue, et les commandes calculées doivent être fournies aux sous-systèmes placés dans les niveaux inférieurs et caractérisés par des dynamiques plus rapides, elles constitueront les consignes pour ces niveaux inférieurs. En conséquence, ces systèmes doivent être pilotés à une cadence plus élevée et peuvent être placés sur plusieurs niveaux inférieurs dans la hiérarchie. Un exemple de structure à 3 niveaux est présenté Figure 44.

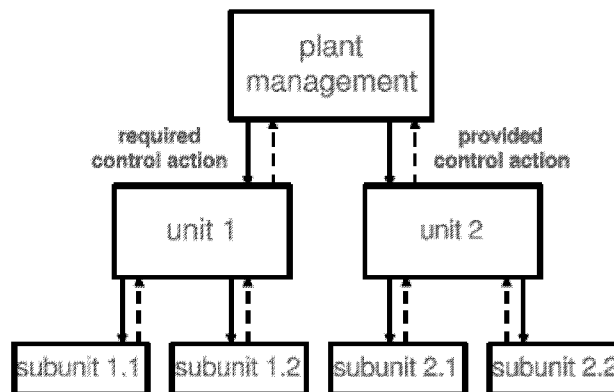


Figure 44 : Structure hiérarchisée d'un système à 3 niveaux

Dans ces structures, le régulateur en haut de la pyramide calcule les commandes désirées, qui seront donc les signaux de référence pour les niveaux immédiatement inférieurs. Pour garantir que les consignes calculées aux niveaux supérieurs soient faisables pour les dynamiques et contraintes du niveau inférieur, et pour tenir compte de la présence de perturbations au niveau inférieur, des informations doivent être transmises de bas en haut. De plus, les régulateurs du niveau inférieur doivent garantir la solution des problèmes de poursuite avec une bonne précision, de sorte que le décalage entre ce qui est requis par le niveau plus élevé et ce qui est prévu par le bas, ne détruise pas des propriétés fondamentales, telles que la stabilité et la performance.

Du point de vue de l'ingénieur, cette structure hiérarchisée correspond à une structure de type cascade avec cependant des échanges d'information supplémentaires. Ainsi la Figure 45 considère de nouveau une structure à 3 niveaux, pour laquelle les boucles internes ont des dynamiques plus rapides, tandis que la boucle externe correspond au contrôle du système au plus haut niveau.

Dans les systèmes de contrôle industriels actuels, les boucles internes font souvent appel à des régulateurs standards de type PI-PID, tandis que la boucle supérieure se préoccupe plutôt de l'optimisation globale, introduisant par exemple des critères de type économiques, de disponibilité de matériels, ou incluant les aspects de supervision.

La stratégie de commande en cascade est réalisée typiquement en accord avec un principe de découplage fréquentiel : les dynamiques de boucles étant supposées différentes, la synthèse des régulateurs s'effectue en supposant la boucle interne transparente pour la boucle supérieure, agissant dans une bande de fréquence déconnectée. De plus, classiquement,

aucune information n'est transmise à la boucle externe (lignes en pointillé Figure 45) de sorte que chaque niveau supérieur n'est pas au courant de la façon dont les niveaux inférieurs s'acquittent des exigences.

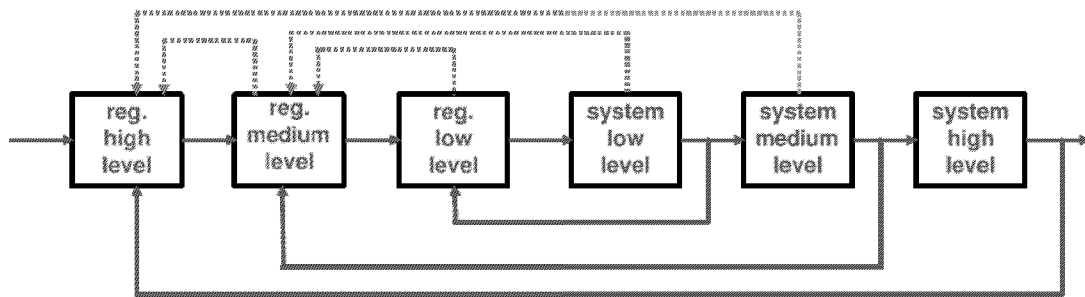


Figure 45 : Commande en cascade à 3 boucles

Donc, si dans la phase de conception les boucles internes font souvent appel à des régulateurs standards PI-PID, la commande MPC a tendance à être utilisée pour la conception d'algorithmes de commande au niveau supérieur. Or il est possible d'utiliser la commande MPC à tous les niveaux, en particulier lorsque le principe du découplage entre boucles est pris en défaut, ou lorsque également le contrôle des sous-systèmes à des niveaux inférieurs de la hiérarchie a besoin d'une conception plus « avancée », avec l'avantage important de pouvoir prendre en compte les contraintes sur les commandes, les états et les sorties.

8 BIBLIOGRAPHIE

- [BIT 90] BITMEAD, R.R., M. GEVERS et V. WERTZ, *Adaptive Optimal Control. The Thinking Man's GPC*, Prentice Hall International, Systems and Control Engineering, 1990.
- [BOU 95] BOUCHER, P. et D. DUMUR, *Predictive Motion Control*, Journal of Systems Engineering. Special Issue on Motion Control Systems, vol. 5, pp. 148-162, Springer-Verlag, London, 1995.
- [BOU 96] BOUCHER, P. et D. DUMUR, *La Commande Prédictive*, Collection Méthodes et Pratiques de l'Ingénieur, Editions Technip, Paris, 1996.
- [CLA 87a] CLARKE, D.W., C. MOHTADI et P.S. TUFFS, *Generalized Predictive Control, Part I "The Basic Algorithm", Part II "Extensions and Interpretation"*, Automatica, vol. 23-2, pp. 137-160, Mars, 1987.
- [CLA 87b] CLARKE, D.W., C. MOHTADI et P.S. TUFFS, *Properties of Generalized Predictive Control*, Proceedings 10th World Congress IFAC'87, vol. 9, pp. 63-74, Munich, Juillet, 1987.
- [CLA 88] CLARKE, D.W., *Application of Generalized Predictive Control to Industrial Processes*, IEEE Control Systems Magazine, pp. 49-55, Avril, 1988.
- [CLA 91] CLARKE, D.W. et R. SCATOLLINI, *Constrained Receding Horizon Predictive Control*, Proceedings IEE-D, vol. 138, pp. 347-354, 1991.
- [COM 94] COMPAS, J.M., J.L. ESTIVAL, N. FULGET, R. MARTIN et J. RICHALET, *Industrial Applications of Predictive Functional Control*, Proceedings 3rd IEEE Conference on Control Applications, vol. 3, pp. 1643-1655, Glasgow, Août, 1994.
- [DUM 98] DUMUR, D. et P. BOUCHER, *A Review Introduction to Linear GPC and Applications*, Journal A, vol. 39, n°4, pp.21-35, Décembre 1998.
- [FAV 88] FAVIER, G, D. DUBOIS, et C. ROUGERIE, *A Review of K-Step Ahead Predictors*, Proceedings IFAC'88 Identification and System Parameter Estimation, Pekin, Août, 1988.
- [IRV 86] IRVING, E., C.M. FALINOWER et C. FONTE, *Adaptive Generalized Predictive Control with Multiple Reference Model*, Proceedings 2nd ACASP/86, Lund, Juin, 1986.
- [LAN 88] LANDAU, I.D., *Identification et commande des systèmes*, Hermès, 1988.

- [LEV 93] LEVA, A. et R. SCATOLLINI, *Predictive Control with Terminal Constraints*, Proceedings 2nd European Control Conference, vol. 2, pp. 932-936, Groningen, Juin, 1993.
- [MOH 86] MOHTADI, C. et D.W. CLARKE, *Generalized Predictive Control, LQ, or Pole Placement: A United Approach*, Proceedings 25th Conference on Decision and Control, Athènes, Décembre, 1986.
- [MOH 92] MOHTADI, C., SHAH, S.L. et D.G. FISHER, *Frequency response characteristics of MIMO GPC*, International Journal of Control, vol. 55-4, pp. 877-900, 1992.
- [NIC 93] DE NICOLAO, G. et R. SCATOLLINI, *Stability and Output Terminal Constraints in Predictive Control*, Advances in Model-Based Predictive Control, pp. 105-121, Oxford Science Publications, Oxford University Press, 1993.
- [RIC 78] RICHALET, J., A. RAULT, J.L. TESTUD et J. PAPON, *Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes*, Automatica, vol. 14, 1978.
- [RIC 87] RICHALET, J., S. ABU EL ATA, C. ARBER, M.B. KUNTZE, A. JACUBASCH et W. SCHILL, *Predictive Functional Control. Application to Fast and Accurate Robots*, Proceedings 10th IFAC World Congress, Munich, Juillet, 1987.
- [RIC 93] RICHALET, J., *Pratique de la Commande Prédictive*, Hermès, 1993.
- [SAN 94] SANZO, M., J. RICHALET et C. PRADA, *Matching the Uncertainty of the Model Given by Global Identification Techniques to the Robustness of Model-Based Predictive Controller*, Advances in Model-Based Predictive Control, pp. 386-401, Oxford Science Publications, Oxford University Press, 1994.
- [SCA 09] SCATOLINI, R., *Architectures for distributed and hierarchical Model Predictive Control – A review*, Journal of Process Control, vol. 19, pp. 723–731, 2009.
- [WER 87] WERTZ, V., R. GOREZ et K.Y. ZHU, *A new Generalized Predictive Controller Application to the Control of Process with Uncertain Dead-Time*, Proceedings 26th Conference on Decision and Control, pp. 2168-2173, Los Angeles, Décembre, 1987.